



物理与生活

# 基于波动光学的虹与霓最佳观测角的理论研究<sup>\*</sup>

梁明贵 杨振军 邸冰 张书敏

(河北师范大学物理学院 河北 石家庄 050024)

(收稿日期:2022-09-20)

**摘要:**虹与霓的最佳观测角是观测到虹与霓现象最明显的观测角.已有的研究表明,虹与霓观测角对入射角的极值就是最佳观测角.根据波动光学原理,分析了任意入射角下产生虹或霓的光束进入眼睛的光能量流的大小,并计算得到了在观测角的极值位置时光能量流最大,从而验证了上述结论,并在此基础上做了简要分析.

**关键词:**虹;霓;观测角;光能量流

## 1 引言

雨过天晴,天空中可能会出现一道薄如绸带的弧形彩色光谱,人们将这种自然现象称之为“彩虹”.彩虹其实是一级虹,简称虹,除了一级虹,自然界中还存在二级虹、三级虹等高级虹,它们是太阳光在空气中的水珠表面反射和折射的结果.然而,高级虹一般亮度都比较弱,人眼难以观察到.因此,一般在自然界中观察到的往往是一级虹和二级虹.二级虹通常又被称为霓.根据虹与霓的反射和折射原理可以测量液滴折射率和尺寸<sup>[1-2]</sup>,因此对虹与霓现象的研究具有实际意义.

从虹或霓的某个特殊观测角观测,它的亮度最大,也就能最清晰地观测到,我们把这个观测角叫做虹或霓的最佳观测角.许多人对此做出了优秀的研究工作<sup>[3-5]</sup>,他们认为虹与霓的最佳观测角就是观测角对入射角的极值,由此确定了虹的观测范围是 $40^\circ \sim 42^\circ$ ,霓的观测范围是 $50^\circ \sim 53^\circ$ .本文从波动光学的角度验证了这个结论的合理性.选取任意某个波长的可见光,考虑到进入人眼的光能流越大则人感知到的亮度越大<sup>[6]</sup>,利用 MATLAB 计算进入人眼的光能流最大时对应的观测角,就是形成虹或霓

时该波长光的最佳观测角.对比最佳观测角与观测角的极值,得出它们在数值上相等,由此从理论上验证了虹或霓观测角的极值就是最佳观测角.

## 2 虹与霓产生原理的简要分析

将空气中的水珠近似为球形,当太阳光照射到水珠的上半部分时,在水珠内部经过了一次反射,可能会形成虹,如图 1 所示, $\alpha_1$  为虹的观测角.

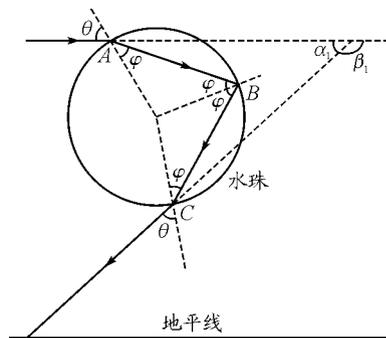


图 1 形成虹的光路示意图

由几何关系和折射定律易得

$$\alpha_1 = 4\arcsin \frac{\sin \theta}{n} - 2\theta \quad (1)$$

当太阳光照射到水珠的下半部分时,在水珠内部经过两次反射,可能会形成霓,如图 2 所示, $\alpha_2$  为霓的观测角.

<sup>\*</sup> 河北省高等教育教学改革研究与实践项目,项目编号:2021GJJG129;河北师范大学教学改革研究项目,项目编号:2022XJJG040, 2022XJJG065.

作者简介:梁明贵(2000-),男,在读本科生.

通讯作者:杨振军(1978-),男,博士,副教授,主要研究方向为非局域空间光光子、激光光束的传输与变换、超短激光脉冲等.

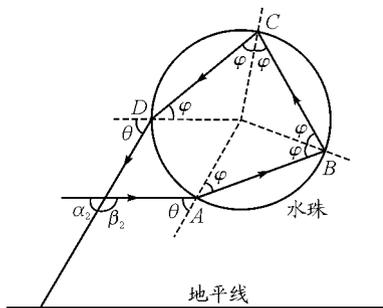


图 2 形成霓的光路示意图

由几何关系和折射定律易得

$$\alpha_2 = \pi + 2\theta - 6\arcsin \frac{\sin \theta}{n} \quad (2)$$

另外,可见光的波长在 380 ~ 760 nm 之间<sup>[7]</sup>,并且水对可见光中波长较长的光波折射率较小.因此,结合式(1)和式(2)可知:当入射角  $\theta$  一定时,虹的观测范围下限和上限可由波长较短的紫光和波长较长的红光的观测角给出,霓的观测范围下限和上限由此时的红光和紫光的观测角给出.因此,本文以波长为 700 nm 的红光和波长约为 400 nm 的紫光为例进行分析,得出了虹与霓的观测范围.

### 3 最佳观测角的理论计算方法

对于任意某个波长的太阳光,当人眼以某个特殊的观测角观测虹或霓现象时,光对人眼瞳孔的光能流最大,此时人感知到的光亮度最大<sup>[6]</sup>,则观测到的虹或霓现象最为明显.我们可以认为这时的观测角就是虹或霓现象中该波长光的最佳观测角.因此,分析形成虹或霓的太阳光对瞳孔的光能流随入射角的变化关系,即可得到虹或霓的最佳观测角.

太阳光由一种介质(折射率为  $n_1$ )进入另一种介质(折射率为  $n_2$ )发生折射和反射时,设折射角和反射角分别为  $i_1$  和  $i_2$ .在光的电磁理论中,透射率是透射光束与入射光束的能量流之比,反射率是反射光束与入射光束的能量流之比.光在两介质分界面上发生反射和折射时,其 p 分量(平行于入射面分量)和 s 分量(垂直于入射面分量)的反射率  $R_p$ 、 $R_s$  和透射率  $T_p$ 、 $T_s$  分别为<sup>[8]</sup>

$$R_p = \left[ \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \right]^2 \quad (3)$$

$$R_s = \left[ \frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \right]^2 \quad (4)$$

$$T_p = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} \left[ \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)} \right]^2 \quad (5)$$

$$T_s = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} \left[ \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2)} \right]^2 \quad (6)$$

先对虹进行分析.由于太阳光是自然光,假设其强度为  $I_0$ ,则入射光中 p 分量和 s 分量各占一半的能量,则图 1 中的出射光束(C 点之后的光束)强度  $I_1$  为

$$I_1(\theta, n) = \frac{1}{2} I_0 (T_{pA} R_{pB} T_{pC} + T_{sA} R_{sB} T_{sC}) \quad (7)$$

式(7)中涉及的透射率和反射率可以将图 1 中 A、B、C 3 点的情况代入得到.由于  $\theta$ 、 $n$ 、 $\varphi$  中只有两个变量是独立的,因此,可以将  $I_1$  看作  $\theta$ 、 $n$  的函数.

雨后空气中水珠的半径约 1 mm,人眼瞳孔半径约  $r_m = 2$  mm,它们都远小于虹的平均高度约  $h = 2000$  m,所以可以将地面上观测者的瞳孔视为一个半径为  $r_m$  的圆平面,并可以将水珠视为一个向四周不均匀发光的点光源.于是,图 3 示意了水珠(点光源)发出的某条光束传播到 P 点的情形.

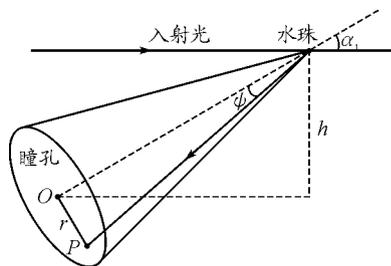


图 3 水珠(点光源)对瞳孔光照的示意图

图 3 中,  $\psi$  是 O 点与水珠连线和 P 点与水珠连线的夹角,  $\psi$  与  $r$ 、 $\alpha_1$  的关系是

$$\psi(r, \alpha_1) = \arctan \frac{r \sin \alpha_1}{h} \quad (8)$$

于是,形成虹时,水珠(点光源)发出的光通过人眼的光能流可表示为

$$\Phi_1(\theta, n) = \int_0^{r_m} I_1(\theta, n) \cos \psi(r, \alpha_1) 2\pi r dr \quad (9)$$

考虑到  $r \ll h$  导致  $\cos \psi \approx 1$ ,将式(9)近似化为

$$\Phi_1(\theta, n) = \pi r_m^2 \int_0^{\psi_m} 2\pi I_1(\theta, n) d\psi \quad (10)$$

式(10)中的  $\psi_m$  是  $r = r_m$  时对应的  $\psi$  的值.式(10)表示将某个观测角  $\alpha_1$  附近  $\psi_m$  角度的光束都看作是垂直于瞳孔入射.并类比电场强度通量的定义:取电场线的数密度等于场强的大小,则通过这一平

面的电场线总数即是通过该平面的电场强度通量<sup>[9]</sup>. 我们可以把该范围内的光束分为大量足够细小的光束, 对每条细光束携带的能量进行求和, 再乘以瞳孔面积  $\pi r_m^2$ , 就可以得到式(10)的近似值, 这个计算我们用 MATLAB 来完成.

对于霓, 同理可得光能流  $\Phi_2(\theta, n)$  的近似式为

$$\Phi_2(\theta, n) = \pi r_m^2 \int_0^{\psi_m} 2\pi I_2(\theta, n) d\psi \quad (11)$$

在式(11)中, 出射光束(图2中D点之后的光束)的强度  $I_2(\theta, n)$  为

$$I_2(\theta, n) = \frac{1}{2} I_0 (T_{p_A} R_{p_B} R_{p_C} T_{p_D} + T_{s_A} R_{s_B} R_{s_C} T_{s_D}) \quad (12)$$

在式(12)中涉及的透射率和反射率可以将图2中A、B、C、D 4点的情况代入得到.

#### 4 验证过程

若虹或霓观测角的极值  $\alpha'_{1m}$  或  $\alpha'_{2m}$  与第2节中我们定义的最佳观测角  $\alpha_{1m}$  或  $\alpha_{2m}$  在数值上相等, 则可以验证虹或霓观测角的极值就是最佳观测角这一结论的合理性. 文献[10]指出, 水对红光 700.0 nm 和紫光 404.7 nm 的折射率分别为  $n_{red} = 1.33109$  和  $n_{pur} = 1.34375$ . 下面以这两种波长的光为例对虹与霓分别进行验证, 我们使用的验证方法对其他波长的光同样适用.

##### 4.1 虹的最佳观测角

分别将  $n_{red} = 1.33109$  和  $n_{pur} = 1.34375$  代入式(10)并用 MATLAB 绘制归一化的  $\Phi_1 - \theta$  的图像如图4和图5所示.

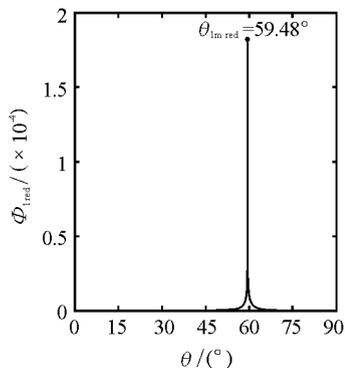


图4 形成虹的 700.0 nm 红光对人眼光能流的相对值随入射角的变化图

由图4可见, 对于红光 700.0 nm, 当  $\theta$  在 59.48° 附近时,  $\Phi_1$  的值会显著增大, 当  $\theta = 59.48^\circ$  时  $\Phi_1$  取最大值. 将  $\theta = 59.48^\circ$  和  $n_{red} = 1.33109$  代入式(1)得

$$\alpha_{1mred} = 42.36^\circ \quad (13)$$

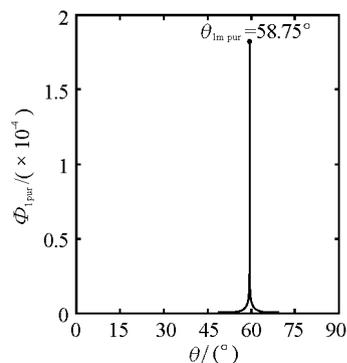


图5 形成虹的 404.7 nm 紫光对人眼光能流的相对值随入射角的变化图

由图5可见, 对于紫光 404.7 nm, 当  $\theta = 58.75^\circ$  时  $\Phi_1$  取最大值. 将  $\theta = 58.75^\circ$  和  $n_{pur} = 1.34375$  代入式(1)得

$$\alpha_{1mpur} = 40.54^\circ \quad (14)$$

现在计算形成虹的任意确定波长可见光(水对其的折射率  $n$  也随之确定)的观测角极值  $\alpha'_{1m}$  对式(1)求  $\theta$  的偏导数得

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} = \frac{4 \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} - 2 \quad (15)$$

令其为零解得

$$\theta'_{1m} = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \quad (16)$$

再代入式(1)得到

$$\alpha'_{1m} = 4 \arcsin \frac{\sin \theta'_{1m}}{n} - 2 \theta'_{1m} \quad (17)$$

分别将  $n_{red} = 1.33109$  和  $n_{pur} = 1.34375$  代入式(17)得到相应观测角  $\alpha_1$  对入射角  $\theta$  的极值为

$$\alpha'_{1mred} = 42.36^\circ \quad (18)$$

$$\alpha'_{1mpur} = 40.54^\circ \quad (19)$$

对比式(13)和(18)、式(14)和(19)可知,  $\alpha_{1mred} = \alpha'_{1mred}$ ,  $\alpha_{1mpur} = \alpha'_{1mpur}$ . 类似的, 可以选取任意其他波长的可见光进行验证, 可以得到同样的结论, 因此, 虹的最佳观测角为观测角对入射角的极值这一结论是合理的. 另外, 红光的最佳观测角可以给出虹的观测

范围上限,紫光可以给出下限,所以,虹的观测范围是

$$40.54^\circ \leq \alpha_1 \leq 42.36^\circ \quad (20)$$

此结果与广为人知的虹的观测角范围  $40^\circ \sim 42^\circ$  相符.

### 4.2 霓的最佳观测角

分别将  $n_{\text{red}}=1.33109$  和  $n_{\text{pur}}=1.34375$  代入式(11)并用 MATLAB 绘制归一化的  $\Phi_2 - \theta$  的图像如图6和图7所示.

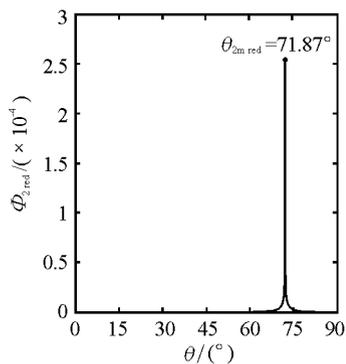


图6 形成霓的700.0 nm红光对人眼光能流的相对值随入射角的变化图

由图6可见,对红光700.0 nm,当  $\theta=71.87^\circ$  时  $\Phi_2$  取最大值.将  $\theta=71.87^\circ$  和  $n_{\text{red}}=1.33109$  代入式(2)得

$$\alpha_{2\text{mred}} = 50.39^\circ \quad (21)$$

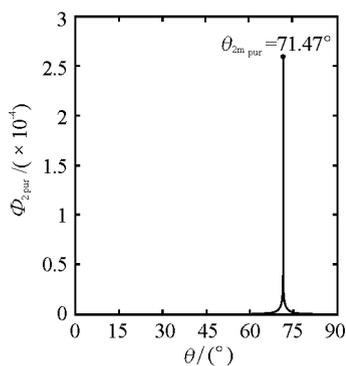


图7 形成霓的404.7 nm紫光对人眼光能流的相对值随入射角的变化图

由图7可见,对紫光404.7 nm,当  $\theta=71.47^\circ$  时,  $\Phi_2$  取最大值.将  $\theta=71.47^\circ$  和  $n_{\text{pur}}=1.34375$  代入式(2)得

$$\alpha_{2\text{mpur}} = 53.67^\circ \quad (22)$$

现在计算形成霓的任意确定波长可见光(水对

其的折射率  $n$  也随之确定)的观测角极值  $\alpha'_{2\text{m}}$  对式(2)求  $\theta$  的偏导数得

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} = 2 - \frac{6 \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = 0 \quad (23)$$

令其为零解得

$$\theta_{2\text{m}}' = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} \quad (24)$$

再代入式(2)得到

$$\alpha_{2\text{m}}' = \pi + 2\theta_{2\text{m}}' - 6 \arcsin \frac{\sin \theta_{2\text{m}}'}{n} \quad (25)$$

分别将  $n_{\text{red}}=1.33109$  和  $n_{\text{pur}}=1.34375$  代入式(25)得到相应观测角  $\alpha_2$  对入射角  $\theta$  的极值为

$$\alpha'_{2\text{mred}} = 50.39^\circ \quad (26)$$

$$\alpha'_{2\text{mpur}} = 53.67^\circ \quad (27)$$

对比式(21)和(26)、式(22)和(27)可知,  $\alpha_{2\text{mred}} = \alpha'_{2\text{mred}}$ ,  $\alpha_{2\text{mpur}} = \alpha'_{2\text{mpur}}$ . 类似的,可以选取任意其他波长的可见光进行验证,可以得到同样的结论,因此,霓的最佳观测角为观测角对入射角的极值这一结论是合理的.另外,红光可以给出霓的最佳观测角的下限,紫光给出上限,所以,霓的观测范围是

$$50.39^\circ \leq \alpha_2 \leq 53.67^\circ \quad (28)$$

此结果与广为人知的霓的观测角范围  $50^\circ \sim 53^\circ$  相符.

### 5 讨论

无论是虹还是霓,它们的最佳观测角都在观测角对入射角的极值处取到,我们对这个结果进行了简要分析.图8以太阳光中700.0 nm的红光为例示意了虹与霓的观测角  $\alpha$  随入射角  $\theta$  的变化情况.

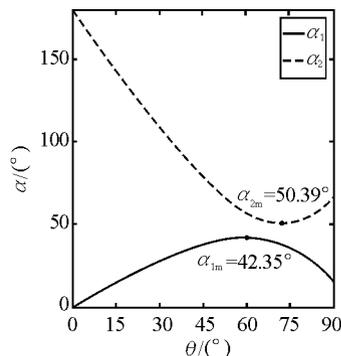


图8 虹与霓观测角和入射角的关系图

图8表明了观测角在极值点附近随入射角的变化最缓慢.结合图3分析,当人以某个观测角观测虹或霓现象时,进入人眼的光束实际上是该观测角附近小角度的光束,所以当观测角取极值时,对应会有更多的入射光束经过一系列折射和反射进入人眼.即便水珠(点光源)向各个方向发出的每条光束携带的能量大小不同,但占主导地位的是范围内光束的数量,而不是每条光束的能量.所以在观测角取极值时,形成虹或霓的光束对人眼的光能流最大,使此时的虹或霓的现象最明显.

## 6 结束语

本文在波动光学的理论下,对虹或霓现象,选取任意波长的光,利用MATLAB绘制了进入人眼的光能流和入射角的图像,得出了光能流取最大值时对应的观测角,即最佳观测角.将最佳观测角与观测角对入射角的极值进行比较,得出了虹或霓最佳观测角和观测角的极值在数值上相等,从理论上验证了虹或霓观测角的极值就是最佳观测角这一结论的合理性,并对这个结论进行了简要讨论.

### 参考文献

[1] WANG Xiaohao, Wu Yingchun, Lyu Qimeng, et al. Secondary rain bow refractometry for droplet refractive

index and size measurement[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2022, 149: 106831.

[2] CAO Yayuan, WANG Wenting, YU Haitao, et al. Cameron Tropea. Characterization of refractive index and size of a spherical drop by using Gaussian beam scattering in the secondary rain bow region[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2020, 242: 106785.

[3] 张文慧, 张协成. 虹的几何光学原理初探[J]. *物理教学*, 2008, 30(9): 23-25.

[4] 顾建元. 人类对虹霓现象认识的初探[J]. *物理教师*, 2021, 42(7): 71-73.

[5] 谭少轩. 虹霓现象的物理本质研究[J]. *西安文理学院学报(自然科学版)*, 2011, 14(4): 50-54.

[6] 姚启钧. 光学教程[M]. 6版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[7] 郁道银, 谈恒英. 工程光学[M]. 5版. 北京: 机械工业出版社, 2016.

[8] 梁铨延. 物理光学[M]. 5版. 北京: 电子工业出版社, 2018.

[9] 程守洙, 江之永. 普通物理学上册[M]. 7版. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[10] 姜良广, 孙鹏. 水的折射率与波长间函数关系的模型[J]. *辽宁大学学报(自然科学版)*, 2002, 29(2): 127-130.

# Theoretical Study on the Optimal Observation Angle of Rain bow and Secondary Rain bow Based on Wave Optics

LIANG Minggui YANG Zhenjun DI Bing ZHANG Shumin

(College of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei 050024)

**Abstract:** The best observation angle of rain bow and secondary rain bow is the most obvious observation angle when rain bow and secondary rain bow phenomena are observed. The existing research shows that the extreme value of the observation angle of rain bow and secondary rain bow to the incidence angle is the best observation angle. According to the principle of wave optics, the size of the luminous energy flow of the light beam generating rain bow or secondary rain bow into the eyes at any incidence angle is analyzed, and the maximum optical energy flow is calculated at the extreme position of the observation angle, which verifies the above conclusion, on this basis, a brief analysis is made.

**Key words:** rain bow; secondary rain bow; best observation angle; light energy flow