

# 圆形轨道运动质点受径向速度扰动后的轨道

——兼谈圆形轨道稳定性条件

顾志琴 梁佩佩

(江苏航空职业技术学院文理学院 江苏 镇江 212134)

(收稿日期:2022-09-01)

**摘要:**导出了有心力场中质点无量纲形式的轨道微分方程,给出了极角与极径之间的积分关系式,求出了  $n=2$ 、 $n=-1$  和  $n=3$  时,在圆形轨道运动质点受到径向速度扰动后的轨道方程,提出了圆形轨道稳定性条件的图像分析方法.

**关键词:**有心力;圆形轨道;径向速度

有心力作用下物体的运动是人们关心的一个重要运动,研究质点在有有心力作用下的轨道方程是理论力学教材的重要内容之一.本文首先导出了有心力场中质点无量纲形式的轨道微分方程,根据无量纲形式的轨道微分方程,给出了极角与极径之间的积分关系式,求出了平方反比引力( $n=2$ )、一次方正比引力( $n=-1$ )和立方反比引力( $n=3$ )作用下,在圆形轨道运动质点受到径向速度扰动后的轨道方程,并由轨道方程得出结论: $n=2$ 、 $n=-1$ 时,圆形轨道是稳定的; $n=3$ 时,圆形轨道是不稳定的.对  $n$  取其他整数和非整数值的情况,文章提出了圆形轨道稳定性条件的图像分析方法,得出和其他方法一样的结论.

## 1 无量纲形式的轨道微分方程

设质量为  $m$  的质点,在有有心力  $F(r)$  作用下做平面运动,采用平面极坐标系,质点的运动微分方程为

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (2)$$

对式(2)积分得

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (3)$$

式(3)中  $h$  为常数,研究有心力问题时,常以式(1)、(3)为基本方程.对于幂次有心引力

$$F(r) = -mk^2r^{-n}$$

式中  $k^2$  是常数,上式代入式(1)并由式(1)、式(3)消

去  $\dot{\theta}$  可得

$$\ddot{r} - h^2r^{-3} + k^2r^{-n} = 0 \quad (4)$$

式(4)是幂次有心力作用下质点径向运动微分方程.因为

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (5)$$

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2h^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad (6)$$

式(6)代入式(4)得

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r + \frac{k^2}{h^2}r^{-n+4} = 0 \quad (7)$$

式(7)为幂次有心力作用下质点的轨道微分方程.考虑到质点受到扰动前做圆形轨道运动,假设质点圆形轨道半径为  $r_0$ ,由式(4)可知

$$\frac{k^2}{h^2} = r_0^{n-3}$$

代入式(7)可得

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r + r_0^{n-3}r^{4-n} = 0$$

取圆形轨道的半径  $r_0$  为长度单位,即令  $r=r_0\tilde{r}$ ,代入上式,得到无量纲的轨道微分方程为

$$\frac{d^2\tilde{r}}{d\theta^2} - \frac{2}{\tilde{r}} \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)^2 - \tilde{r} + \tilde{r}^{4-n} = 0 \quad (8)$$

由推导式(8)的过程可知,做圆形轨道运动的质点,只要在受扰前后的  $h$  值保持不变,式(8)都成立,严格地讲,质点在空间的位置不能突变,质点只有受径

向速度扰动时,式(8)才能成立.假设质点做半径为 $r_0$ 圆形轨道运动的角速度为 $\dot{\theta}_0$ ,则 $h = r_0^2 \dot{\theta}_0$ ,当质点在半径为 $r_0$ 圆形轨道受到径向速度 $\dot{r}_0$ 的扰动时,由式(5)可得

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_0 = \frac{\dot{r}_0}{\dot{\theta}_0}$$

利用 $r = r_0 \tilde{r}$ 得

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 = \frac{\dot{r}_0}{r_0 \dot{\theta}_0}$$

扰动速度沿径向向外,则

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 > 0$$

扰动速度指向力心,则

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 < 0$$

## 2 圆形轨道运动质点受径向速度扰动后的轨道

式(8)为二阶可解类型微分方程

$$y'' + P(y)y'^2 + Q(y) = 0$$

其解为<sup>[3]</sup>

$$x = \int e^{\int P dy} \left( -2 \int Q e^{2 \int P dy} dy + C_1 \right)^{-\frac{1}{2}} dy + C_2$$

因此式(8)的解可表示成

$$\theta = \int e^{\int \left(-\frac{2}{\tilde{r}}\right) d\tilde{r}} \cdot$$

$$\left[ -2 \int (-\tilde{r} + \tilde{r}^{4-n}) e^{\int \left(-\frac{2}{\tilde{r}}\right) d\tilde{r}} d\tilde{r} + C_1 \right]^{-\frac{1}{2}} d\tilde{r} + C_2 = \int \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ -2 \int (-\tilde{r}^{-3} + \tilde{r}^{-n}) d\tilde{r} + C_1 \right]^{-\frac{1}{2}} d\tilde{r} + C_2$$

完成上式中括号中积分得

$$\begin{cases} \theta = \int \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{1}{\sqrt{C_1 + \frac{2}{n-1} \tilde{r}^{-n+1} - \tilde{r}^{-2}}} d\tilde{r} + C_2 & (n \neq 1) \\ \theta = \int \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{1}{\sqrt{C_1 + 2 \ln \tilde{r} - \tilde{r}^{-2}}} d\tilde{r} + C_2 & (n = 1) \end{cases} \quad (9)$$

显然,只有完成式(9)中积分,并利用初始条件确定出常数 $C_1$ 、 $C_2$ ,才能得到 $\theta$ 和 $\tilde{r}$ 的解析表达式.假设质点受径向速度的扰动位置 $P_0$ 在 $x(\tilde{x})$ 轴上,规定质点由 $x(\tilde{x})$ 轴逆时针转过的角度为 $\theta$ ,则初始条件为 $\tilde{r}_0 = 1$ 、 $\theta_0 = 0$ 和 $\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0$ .下面,以此为初始条件,对式(9)可积的3种情况,写出圆形轨道受径向速度

扰动后的轨道方程.

(1) $n = 2$ ,质点受平方反比引力 $F(r) = -mk^2 r^{-2}$ 作用.将 $n = 2$ 代入式(9)整理得

$$\theta = - \int \frac{1}{\sqrt{C_1 + 2\tilde{r}^{-1} - \tilde{r}^{-2}}} d\tilde{r}^{-1} + C_2$$

根据积分公式<sup>[3]</sup>

$$\int \frac{du}{\sqrt{a + bu - cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C$$

积分得

$$\theta = - \arcsin \frac{\tilde{r}^{-1} - 1}{\sqrt{1 + C_1}} + C_2$$

解得

$$\tilde{r} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + C_1} \sin(C_2 - \theta)}$$

利用初始条件得

$$C_2 = 0 \quad \sqrt{1 + C_1} = \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0$$

受径向速度扰动后的轨道方程为

$$\tilde{r} = \frac{1}{1 - \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 \sin \theta} \quad (10)$$

式(10)为圆锥曲线方程.若

$$1 > \left| \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 \right| > 0$$

轨道为椭圆,若

$$\left| \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 \right| = 1$$

轨道为抛物线,若

$$\left| \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 \right| > 1$$

轨道为双曲线.图1表示质点在平方反比引力作用下做圆周运动,受到指向力心的速度扰动,即 $\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 < 0$ 时质点的轨道

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 = -0.5$$

质点沿椭圆逆时针运动,椭圆中心在力心 $O$ 的下方

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 = -1$$

质点沿抛物线逆时针通过近心点后向无穷远处运动

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 = -1.2$$

质点沿双曲线逆时针通过近心点后向无穷远处运动.

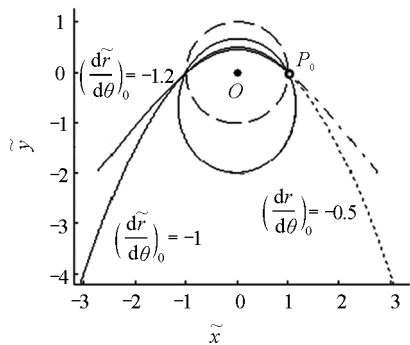


图 1 平方反比引力作用下质点做圆形运动(虚线), 受指向力心的速度扰动后的轨道(实线)

(2)  $n = -1$ , 质点受到一次方正比引力  $F(r) = -mk^2 r$  作用. 将  $n = -1$  代入式(9) 整理得

$$\theta = -\int \frac{1}{2\sqrt{-1 + C_1 \tilde{r}^{-2} - \tilde{r}^{-4}}} d\tilde{r}^{-2} + C_2$$

利用初始条件可解得受径向速度扰动后的轨道方程为

$$\tilde{r}^2 = \frac{1}{\frac{C_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{C_1}{2}\right)^2 - 1} \sin(2\theta - 2C_2)} \quad (11)$$

式(11) 中

$$\frac{C_1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0^2$$

$$2C_2 = -\arcsin \frac{\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0}{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0^2 + 4}}$$

利用  $\tilde{x} = \tilde{r} \cos \theta, \tilde{y} = \tilde{r} \sin \theta$ , 可以把式(11) 中  $\theta$  变量消除, 得到关于变量  $\tilde{x}, \tilde{y}$  的轨道方程, 从而看出式(11) 为极坐标系下的倾斜椭圆方程. 如图 2 所示,  $\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 > 0$  时, 轨道为椭圆中心与力心  $O$  重合、长轴在 I、III 象限的倾斜椭圆. 如果  $\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 < 0$ , 轨道为长轴在 II、IV 象限的倾斜椭圆.

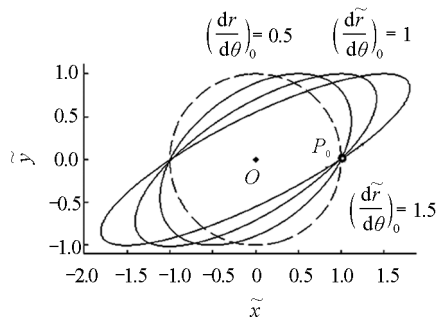


图 2 一次方正比引力作用下质点做圆形运动(虚线), 受径向向外速度扰动后的轨道(实线)

(3)  $n = 3$ , 质点受立方反比引力  $F(r) = -mk^2 r^3$  作用. 将  $n = 3$  代入式(9) 整理得

$$\theta = \int -\frac{1}{\sqrt{C_1}} d\tilde{r}^{-1} + C_2$$

利用初始条件可解得受径向速度扰动后的轨道方程为

$$\tilde{r} = \frac{1}{1 - \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 \theta} \quad (12)$$

由式(12) 不难看出, 当  $\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 > 0$  时, 随  $\theta$  的增大  $\tilde{r}$  不断增大; 当  $\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 < 0$  时, 随  $\theta$  的不断增大  $\tilde{r}$  无限接近于零.

### 3 圆形轨道稳定性条件

如果受到径向微小扰动之后, 质点总是在圆形轨道附近运动而不会远离, 我们就说圆形轨道是稳定的<sup>[2]</sup>. 如果质点受到微小扰动之后, 偏离圆形轨道的程度不断加大, 则这种轨道是不稳定的. 当质点受到径向微小速度扰动后, 根据第 2 小节计算结果我们易知:  $n = 2, n = -1$  时, 质点圆形轨道是稳定的;  $n = 3$  时, 质点圆形轨道是不稳定的. 当  $n$  取其他值时, 我们可以根据式(8) 和初始条件, 用 MATLAB 软件简单编程画出质点受扰后的轨道, 从而判断圆形轨道稳定性. 对  $n < 3$  的整数和非整数值, 质点圆形轨道都是稳定的; 对  $n \geq 3$  的整数和非整数值, 质点圆形轨道都是不稳定的. 图 3 表示质点受一次方反比引力作用即  $n = 1$  时的轨道.

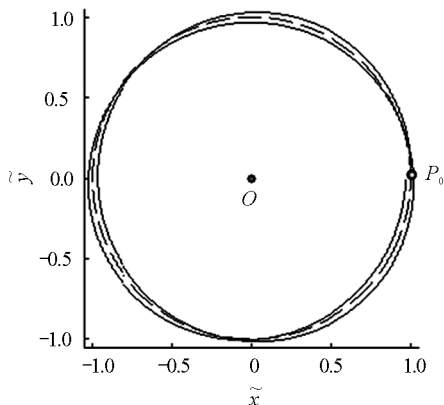


图 3 一次方反比引力作用下质点的受扰轨道

$$\left[\tilde{r}_0 = 1, \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)_0 = 0.05, 0 \leq \theta \leq 4\pi\right]$$

(下转第 29 页)

# Discussion on Application of Angle-Resolved Photoemission Spectroscopy in Solid State Physics Teaching

ZHU Wenliang HUANG Peipei

(College of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710119)

**Abstract:** Angle-resolved photoelectron spectroscopy (ARPES) is the most advanced spectroscopic instrument for studying the electronic band structure of matter and plays an important role in the field of condensed matter physics and material science. In recent years, although more and more ARPES are introduced into domestic universities and scientific research institutions, they were rarely applied to undergraduate teaching exploration and teaching practice because of its high price and complex structure. This paper presents the necessity and feasibility of applying ARPES to undergraduate students in their solid state physics, and discusses the teaching design and implementation, including the introduction of the latest scientific research achievements in physics, the principle of experimental testing of the electronic energy band structure of materials, the growth of single crystals and the display of single crystal samples, laboratory visit and interesting experiments, to stimulate the enthusiasm and desire of the undergraduates to learn physics knowledge, encourage students to construct a clear picture of physics, and improve their understanding of solid state physics.

**Key words:** solid state physics teaching; angle-resolved photoelectron spectroscopy; teaching reform

(上接第 25 页)

由图 3 可看出,质点沿圆形轨道运动(虚线)时,受到沿径向向外的初始微小速度扰动后,质点绕着力心转了 2 圈(实线),受扰轨道前后不重合。 $\theta$  持续增大,受扰轨道一直在变化。质点总是在圆形轨道附近运动,符合质点圆形轨道稳定性定义。除去  $n=2$ 、 $n=-1$  外,对  $n < 3$  的任意整数和非整数值,画图可观察到受扰轨道的一个共同特点:后面一圈的受扰轨道和前面一圈的受扰轨道不重合,受扰轨道一直在变化。

## 4 总结

本文根据有心力场中质点运动微分方程导出轨道微分方程,再利用质点受扰前做圆形轨道运动的条件导出无量纲形式的轨道微分方程式(8)。求出了

在  $n=2$ 、 $n=-1$  和  $n=3$  时,在圆形轨道运动质点受到径向速度扰动后的轨道方程,由轨道方程讨论了圆形轨道运动的稳定性。对小的径向速度扰动,根据式(8)和初始条件,可以方便地画出质点受扰后的轨道,直观得出质点受到有心力的幂次  $n < 3$ ,质点圆形轨道都是稳定的;幂次  $n \geq 3$ ,质点的圆形轨道都是不稳定的。

## 参考文献

- [1] 周衍柏. 理论力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1986: 83-85.
- [2] 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学(上)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1981: 316-321.
- [3] 四川矿业学院数学教研组. 数学手册[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1975: 249, 169

# The Orbit of a Particle Moving along a Circular Orbit Disturbed by Radial Velocity

GU Zhiqin LIANG Peipei

(Institute of Arts and Science, Jiangsu Aviation Technical College, Zhenjiang, Jiangsu 212134)

**Abstract:** The orbital differential equation about a kind of non-dimensional is derived for particle in central force field and the integral relation between the polar angle and the polar diameter is given. when  $n=2$ 、 $n=-1$  and  $n=3$ , the orbit equation are obtained for the motion particle on circular orbit after the radial velocity disturbance. An image analysis method for the stability conditions of circular orbits is proposed.

**Key words:** central force; circular orbit; radial velocity