

# 约化质量在求解约束力中的应用

史 继

(贵港博雅公学 广西 贵港 537000)

(收稿日期:2022-09-28)

**摘要:**利用约化质量和假设法结合相对加速度求解约束力.

**关键词:**约化质量;假设法;相对加速度

## 1 斜面上绳的约束力

**【例1】**质量分别为  $m_1 = 1 \text{ kg}$ 、 $m_2 = 2 \text{ kg}$  的两物体放在固定斜面两侧,如图1所示.斜面两侧倾斜角分别为  $\theta_1 = 37^\circ$  和  $\theta_2 = 53^\circ$ ,斜面顶端有一固定的滑轮.一条轻质绳平行斜面绕过滑轮与两物体连接.不计一切摩擦.重力加速度  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

(1) 将该系统由静止释放,求绳的张力  $F_1$ ;

(2) 将两物体交换位置,其他条件不变,再求绳的张力  $F_2$ .

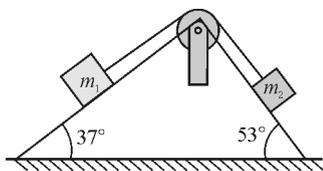


图1 斜面上两物体用跨过滑轮的绳连接

**解析:**本题是一道很常规的连接体与斜面结合的问题,先求出加速度

$$a = \frac{m_2 g \sin \theta_2 - m_1 g \sin \theta_1}{m_1 + m_2}$$

代入数据得  $a = \frac{10}{3} \text{ m/s}^2$

然后对其中一个物体利用牛顿第二定律即可求得绳拉力为  $9.33 \text{ N}$ .第(2)问交换位置之后,暂时看不出能利用第(1)问结果快速求解的方法,只能用相同的式子代入新的数值重算一遍,但得到的拉力与第(1)问结果相同,仍然是  $9.33 \text{ N}$ .这个结果并非巧合,既然从绳的角度无法区分两物体在哪边,那么这

个系统一定存在某种对称性.

在判断弹力是否存在的定性分析中,可以用假设法:如果把接触物体分开之后不能保持平衡,则弹力存在.其实在定量计算中也可以用假设法:假设绳子不存在,则两物体都将沿斜面下滑.由此可以找到物体交换位置后的不变量,两物体沿绳的一维方向的相对加速度不变,总为

$$a = g \sin \theta_1 + g \sin \theta_2$$

代入数据得  $a = 14 \text{ m/s}^2$

当绳不存在时两物体将以相对加速度  $a$  分离,绳要阻止两物体分离则绳拉力  $F_T$  单独对两物体产生的加速度大小之和为  $a$ ,即

$$\frac{F_T}{m_1} + \frac{F_T}{m_2} = a$$

由此得

$$F_T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a \quad (1)$$

其中  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  为两物体的约化质量.

即两物体间的约束力等于两物体的约化质量乘以失去约束力之后的相对加速度.但前提是失去约束力之后别的力不发生变化.在例1第(1)问中,如果斜面右侧与物体间有  $0.1$  的摩擦因数,左侧仍然光滑,则绳断开后摩擦力不变,上述结论仍然适用.但如果斜面两边都是粗糙的,则绳断开后至少有一边的摩擦力会发生变化,上述结论不再使用.

## 2 检验

**【例2】**如图2所示,轻质滑轮固定在天花板上,

一根轻质绳绕过滑轮,两端分别挂着质量为  $1\text{ kg}$  和  $3\text{ kg}$  的物体,不计一切摩擦,求系统由静止释放后绳的拉力.重力加速度  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

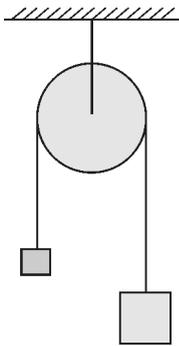


图2 两物体用跨过滑轮的绳竖直悬挂

**【例3】**如图3所示,固定的竖直光滑圆环上穿有两个小球 A、B 通过轻绳连接. A 在圆环的正上方, B 在圆环的正右方.  $m_A = 1\text{ kg}$ ,  $m_B = 4\text{ kg}$ . 求系统由静止释放后绳的拉力.重力加速度  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

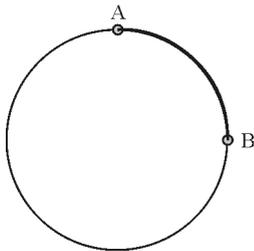


图3 两个穿过圆环的小球用绳连接

利用  $F_T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a$  求得例2拉力为  $15\text{ N}$ , 例3为  $8\text{ N}$ , 均与其他方法求得结果一致.

### 3 推广

**【例4】**底角为  $\alpha$ 、质量为  $M$  的斜劈放在水平地面上,质量为  $m$  的滑块放在斜劈上,如图4所示.不计一切摩擦,求系统由静止释放后滑块与斜劈之间的弹力  $F_N$ .重力加速度为  $g$ .

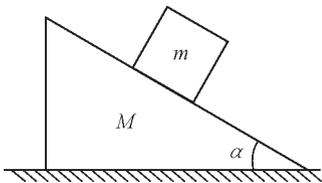


图4 物块在斜劈上无摩擦滑动

**解析:**本题中如果  $F_N$  不存在(可以假想两物体

分开一段微小的距离),则斜劈与地面的压力将发生变化,式(1)不再适用.  $M$  受到两个不正交的约束力作用,可以对式(1)进行适当修改.

#### 3.1 相对加速度

当两物体分离时,斜劈加速度为零,滑块加速度为  $g$ ,此时两者的相对加速度不能简单地认为是  $g$ ,因为相对加速度是竖直的,其中平行斜面分量不受  $F_N$  影响,因此式(1)中的  $a$  应取沿  $F_N$  方向的分量,为  $g \cos \alpha$ .

#### 3.2 约化质量

$F_N$  作用在  $m$  上产生的加速度为  $\frac{F_N}{m}$ ,沿  $F_N$  方向,因此  $m$  可以直接代入约化质量的计算式中.而  $F_N$  作用在  $M$  上时,会使  $M$  产生  $\frac{F_N \sin \alpha}{M}$  的加速度,这个加速度沿  $F_N$  的分量为

$$a_1 = \frac{F_N \sin \alpha}{M} \sin \alpha$$

则斜劈的质量可以等效为

$$M' = \frac{F_N}{a_1} = \frac{M}{\sin^2 \alpha}$$

求得约化质量为  $\frac{Mm}{M + m \sin^2 \alpha}$

用约化质量乘以相对加速度得到

$$F_N = \frac{Mm g \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$$

与其他方法求得结果一致.

实际上本题是先用其他方法求得结果再套用式(1)解释每个量的意义.现在用相同的思路换一道题检验一下.

**【例5】**彼此相切的圆木和直角劈沿着两固定的光滑斜面运动.两斜面与水平面成相同的角度  $\alpha$ ,劈的一面是竖直的,如图5所示.圆木质量为  $m_1$ ,劈的质量为  $m_2$ ,求劈对圆木的压力<sup>[1]</sup>.

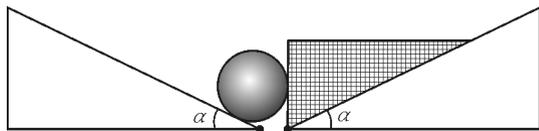


图5 两个斜面上两物体的相互作用

(下转第88页)

学习就是感悟和不断回顾的过程,其实题不用不停的刷,做完每一道题都应对所涉及知识点、方法与经验反思进行总结,掌握其精髓.遇到难题鼓励学生不放弃、不气馁,做到知之为知之,不知为不知,学会反思总结,刨根问底.总之,重要的是培养兴趣,俗话说兴趣是最好的老师,对它有兴趣从而才能深刻地去理解掌握物理知识.

综上所述,不同层次的班级应用“读画写算思”教学有明显的提升效果.我们都知道新高考以情景为载体命题,创设情境教学,对培养学生的物理学科核心素养具有重要作用<sup>[3]</sup>,从侧面也反映出构建多元课堂教学,运用“读画写算思”确实能有效帮助学生掌握物理知识,提升物理建模能力.

### 3 总结

核心素养是落实立德树人根本任务的目标,可是不能只谈目标不谈行动,对于这一目标的实现需要切实可行的方法策略和一系列步骤.通过构建多

(上接第84页)

**解析:**若压力不存在,两物体都将沿斜面自由下滑,加速度大小均为  $g \sin \alpha$ . 由于待求压力  $F_N$  沿水平方向,将物体的加速度取水平分量,得相对加速度  $a = 2g \sin \alpha \cos \alpha$ . 压力  $F_N$  作用于两物体,产生的加速度沿  $F_N$  的分量分别为

$$\frac{F_N \cos^2 \alpha}{m_1} \text{ 和 } \frac{F_N \cos^2 \alpha}{m_2}$$

物体质量等效为  $\frac{m_1}{\cos^2 \alpha}$  和  $\frac{m_2}{\cos^2 \alpha}$

约化质量为  $\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) \cos^2 \alpha}$

元课堂教学,运用“读画写算思”帮助学生掌握高中物理知识构建理想模型,构建理想模型是高中物理学科中重要的一种思想<sup>[4]</sup>,是一种有效的教学方法,不仅可以让学生迅速找到解题的突破口,也能提升课堂的教学质量.当然此方法也存在不足,一是使用时间短暂;二是推广开来供大家检验基数小,但课堂效果突出,值得一试.“读画写算思”教学主要以启迪学生思维,提升物理建模能力为宗旨,能有效应对以情景为载体命题的新高考.

### 参考文献

- [1] 马朱林. 基于对教材质疑的视角开展高中物理深度教学[J]. 物理教师, 2022, 43(11): 36-39.
- [2] 段玉文. 物理核心素养视域下的物理价值探析[J]. 物理通报, 2022(S1): 154-156.
- [3] 余念利. 开展情境式教学 培养物理核心素养[J]. 中学物理教学参考, 2019, 48(11): 11-14.
- [4] 胡金毕. 高中物理教学中利用理想模型分析两个实例的启示[J]. 物理通报, 2020(S1): 54-56.

$$\text{则 } F_N = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \tan \alpha$$

与答案一致.

### 4 结论

本文提供了一种快速求解约束力的方法. 由于有要求其他力不变的局限性,所以本文后半部分引入“等效质量”,将此方法推广到有多个约束存在的情形.

### 参考文献

- [1] 范小辉. 高中物理奥赛实用题典[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2018: 16.

## Application on Reduced Mass in Solving Constraint Forces

SHI Ji

(Boya School in Guigang, Guigang, Guangxi 537000)

**Abstract:** The binding force is solved by combining the reduced mass and the pseudo method with the relative acceleration

**Key words:** reduced mass; hypothesis method; relative acceleration