



物理与生活

网球塔结构限制和稳定性分析

邓欣 杨益 鄢然 李滢滢 黄欣琦 王彪

(西南大学物理科学与技术学院 重庆 400715)

(收稿日期:2022-10-03)

摘要:网球塔搭建结构丰富多变,不同搭建结构下,网球塔的稳定性和结构限制都将发生变化.将结构限制理解为球与球之间的具体几何关系,对于稳定性的判断,用塔身是否能保持静止为定性判据,以 $3n+1$ 类型的网球塔为例,分别对顶层-次顶层网球、递推层网球、底层网球进行受力平衡分析和力矩平衡分析,得到了网球塔搭建成功的最小静摩擦因数要求.之后将相关分析外延到一层多球等其他结构,得到不同搭建结构下,网球塔保持稳定的最小静摩擦因数.

关键词:网球塔;结构限制;稳定性;最小静摩擦因数

1 引言

通过每层 3 个网球、顶部 1 个网球的方式来堆叠建造一座塔,研究这种塔的结构限制和稳定性.当每层使用 3 个以上的球并且在顶层使用合适数量的球时,情况如何变化?这个问题来源于 2022 年 IYPT(国际青年物理学家锦标赛).

2019 年 5 月 23 日格鲁吉亚物理学家安德里亚在不使用任何胶带、胶水和其他黏合剂的情况下,仅利用网球表面的摩擦力成功搭建了一座 9 层小塔,刊登于 *Physics World* 杂志上.

文献[1]通过分析网球塔最上面 3 层网球的稳定条件得出,只有在网球的最大静摩擦因数不小于 $\sqrt{2}$ 的条件下,网球小塔才能仅靠网球之间的摩擦力保持稳定.

网球塔搭建结构丰富多变,不同搭建结构下,网球塔的受力情况、稳定性和结构限制都将发生变化.网球塔搭建背后的理论依据涉及摩擦学、静力学、弹性力学等多个学类,该研究在工程、建筑方面有着广泛的运用,具有重要的研究价值.构建其理论模型将有助于相关建筑结构的研究.

2 $3n+1$ 网球塔结构稳定的条件分析

根据受力情况的不同,将 $3n+1$ 网球塔结构整

体分为 3 个部分,分别分析顶层球与次顶层球间的摩擦因数临界值、递推层之间的摩擦因数临界值、球与地面的摩擦因数要求.

在此处设定网球塔搭建为理想情况,具体是指将网球看成刚性小球,并且按照顺序致密排列,因此认为同层球之间不存在作用.本文中网球塔的层数用 n 来表示(不包括最顶层的网球),从上到下数层数,默认顶层的网球为第零层.

2.1 顶层次顶层球间摩擦因数的分析

2.1.1 角度分析

对于从顶部开始的 3 层球画出俯视图如图 1 所示,其中 G 为顶层球球心位置, A 、 B 、 C 分别为次顶层 3 个球的球心位置, D 、 E 、 F 分别为次顶层球下方一层球的 3 个球的球心,其中 K 为 A 网球和 B 网球的接触点.角度分析几何示意图如图 2 所示.

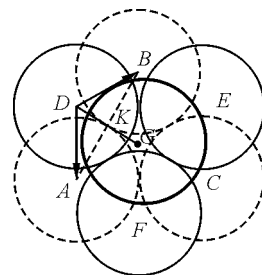


图 1 网球塔几何分析示意图

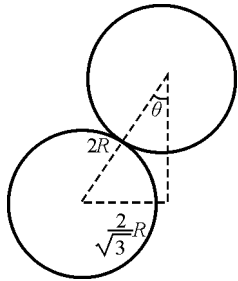


图 2 角度分析几何示意图

假设 θ 角是该研究球的球心与上层球接触点的连线与竖直方向的夹角, 根据几何关系可以知道

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

2.1.2 受力分析

由于网球塔结构具有对称性, 取次顶层中一个球进行受力分析, 如图 3 所示. 该球受到自身的重力 G 、顶层球挤压的力 N_0 以及顶层球的摩擦力 f_0 , 假设该球与顶层球的接触点与球心的连线和竖直方向的夹角为 θ ; 下层球与其接触点为 A 点, A 点与球心连线与竖直方向的夹角为 φ .

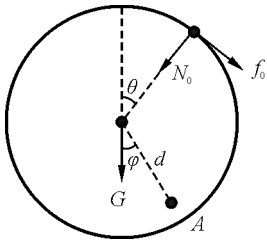


图 3 次顶层某一球受力分析图

此时根据平衡条件有

$$N_0 \cos \theta + f_0 \sin \theta = \frac{1}{3} mg$$

$$N_0 d \sin(\theta + \varphi) + mgd \sin \varphi = f_0 [r + d \cos(\theta + \varphi)]$$

其中 $f_0 = \mu N_0$, $d = \frac{\sqrt{3}}{2} r$ 为轴到球心的距离. 结合角度关系, 可以得到摩擦因数的临界值

$$\mu = \sqrt{2}$$

2.2 递推层间摩擦因数的分析

2.2.1 角度分析

如图 4 所示, 假设 φ 角是该研究球的球心与上层两球接触点的连线中点与竖直方向的夹角, 其中 K 为 A 网球和 B 网球的接触点.

根据几何关系可以知道

$$\sin \varphi = \frac{1}{3} \quad \cos \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

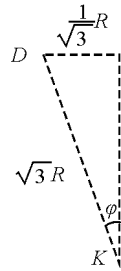


图 4 角度分析示意图

2.2.2 受力分析

对于递推层可以根据图 5 所示的受力分析图进行问题简化. 根据上下层的对称关系, 此时 θ 角的大小与 φ 角的大小相同. 寻找通项公式 (其中 n 表示当前网球层数, 不包含最顶端的球, $n \in N^+, n > 2$).

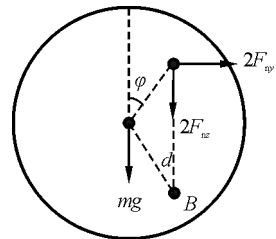


图 5 递推层某一球受力分析图

图 5 所显示的是网球在竖直平面上的投影, B 点是转动轴 (网球与下一层两球接触点的连线) 的投影点. 为方便对单个球的情况进行分析, 我们设水平方向受到两个球对该球的作用力为 $2F_{ny}$, 同理竖直方向上的力为 $2F_{nz}$, 绕转动轴, 由力矩平衡方程可得

$$mgd \sin \varphi + 2F_{nz} \cdot 0 = 2F_{ny} \cdot 2d \cos \varphi$$

解得

$$F_{ny} = \frac{\sqrt{2}}{16} mg$$

再将 F_{ny} 与 F_{nz} 分解在接触点支持力 N 的方向, 以及分解在摩擦力 f 的方向上, 即对于这个平面, 有

$$N_{nl} = F_{nz} \cos \varphi - F_{ny} \sin \varphi$$

$$f_{nl} = F_{nz} \sin \varphi + F_{ny} \cos \varphi$$

为分析三维受力, 可以作出等效力投影分析示意图, 如图 6 所示, 其中 y_n, y_{n+1} 是选取的坐标轴, 为两球心连线的方向. 对实际球心位置进行分析, 两个坐标轴间的夹角 α 为 60° .

结合三维受力, 应从上方投影进行分析, 并且设出 F_{nx} 方向 (F_{nx} 垂直于 F_{ny}). 在此部分, 已知对第 n 层有 $F_{ny} = \frac{\sqrt{2}}{16} mg$, 那么对第 $(n+1)$ 层 y 方向由等效受力有

$$F_{(n+1),y} = -\cos \alpha F_{ny} + \sin \alpha F_{nx}$$

可以解得

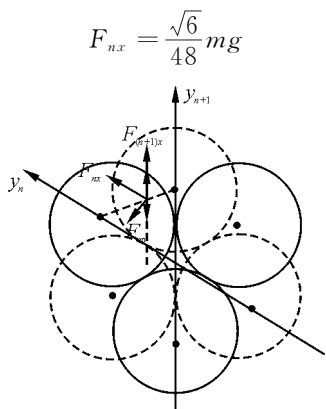


图 6 等效力投影分析示意图

如图 7 所示,对第 n 层其中一个网球进行受力分析,这个网球会受到 4 个网球的作用力.以该球球心为原点,建立空间直角坐标系.

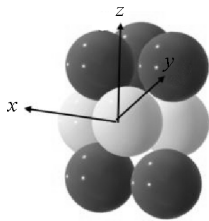


图 7 中间层坐标系示意图

取球半径为 R ,由致密结构的几何关系可得 4 个接触点坐标

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}R, \frac{1}{2}R, \frac{\sqrt{6}}{3}R \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}R, \frac{1}{2}R, -\frac{\sqrt{6}}{3}R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}R, \frac{1}{2}R, \frac{\sqrt{6}}{3}R \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}R, \frac{1}{2}R, -\frac{\sqrt{6}}{3}R \end{pmatrix}$$

选取原点为参考点对研究对象进行受力分析,利用结构对称性,即同层球对该球在同方向上的分力大小相等,且支持力必沿两球球心可将关于力的平衡和力矩的平衡的 6 个方程简化为以下 3 个独立方程

$$\sum F_x : [f_{(n+1)z} + f_{(n-1)z}] \frac{1}{2}R +$$

$$[f_{(n+1)y} + f_{(n-1)y}] \frac{\sqrt{6}}{3}R = 0$$

$$\sum F_y : f_{(n+1)y} + f_{(n-1)y} + N_{(n+1)y} + N_{(n-1)y} = 0$$

$$\sum F_z : 2f_{(n+1)z} + 2f_{(n-1)z} +$$

$$2N_{(n+1)z} + 2N_{(n-1)z} = mg$$

其中 f 为摩擦力, N 为支持力,下标 $(n+1)$ 表示下层球对该球的作用力,下标 $(n-1)$ 为上层球对该球的作用力.

由摩擦力与压力方向正交,可得以下 2 个独立

方程

$$f_{(n+1)x}N_{(n+1)x} + f_{(n+1)y}N_{(n+1)y} +$$

$$f_{(n+1)z}N_{(n+1)z} = 0$$

$$f_{(n-1)x}N_{(n-1)x} + f_{(n-1)y}N_{(n-1)y} +$$

$$f_{(n-1)z}N_{(n-1)z} = 0$$

在 x, z 方向上整体受力有

$$N_{(n+1)z} + f_{(n+1)z} = \frac{3n+1}{6}mg$$

$$f_{(n+1)x} + N_{(n+1)x} = F_{(n+1)x} = F_{nx} = \frac{\sqrt{6}}{48}mg$$

又支持力必沿两球球心连线,故

$$N_{(n+1)x} = \frac{\sqrt{3}}{6}N_{(n+1)}$$

$$N_{(n+1)y} = \frac{1}{2}N_{(n+1)}$$

$$N_{(n+1)z} = \frac{\sqrt{6}}{3}N_{(n+1)}$$

联立以上方程可以解得

$$f_{(n+1)x} = \frac{\sqrt{6}}{48}mg - \frac{\sqrt{3}}{6}N_{(n+1)}$$

$$f_{(n+1)z} = \frac{3n+1}{6}mg - \frac{\sqrt{6}}{3}N_{(n+1)}$$

$$f_{(n+1)y} = -\frac{\sqrt{6}}{16}mg$$

$$N_{(n+1)} = \frac{\sqrt{6} - 9\sqrt{2} + 16\sqrt{2}(3n+1)}{72\sqrt{3}}mg$$

则下层球与该球之间的静摩擦因数通过摩擦力与压力作比得到

$$\mu = \left\{ -13 + \frac{48\sqrt{3}(4+\sqrt{3})(3n+1) - 108\sqrt{3}}{16\sqrt{2}(3n+1) - 9\sqrt{2} + \sqrt{6}} - \right.$$

$$243[96n(3n+1) - 9] \cdot [1024(3n+1)^2 +$$

$$2(64\sqrt{3} - 576)(3n+1) + 336 - 72\sqrt{3}]^{-1} \left. \right\}^{\frac{1}{2}}$$

摩擦因数与层数关系如图 8 所示.

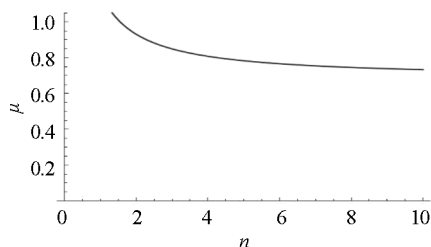


图 8 摩擦因数与层数关系图

2.3 底层球与地面间摩擦因数的分析

球与地面间摩擦受力分析如图 9、图 10 所示.

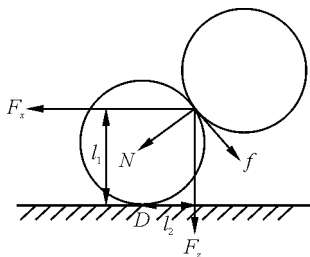


图 9 地面摩擦受力分析示意图(1)

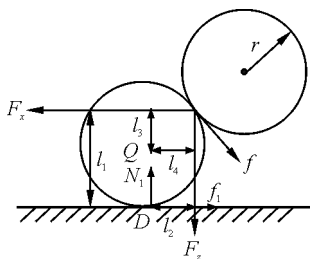


图 10 地面摩擦受力分析示意图(2)

以底层球与地面接触点 D 为平衡点, 由力矩平衡方程可以得到

$$F_x l_1 = F_z l_2$$

其中

$$F_z = \frac{(3n-2)mg}{3}$$

$$l_1 = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}r \quad l_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

可以解得

$$F_x = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(3n-2)mg}{3}$$

以底层球质心 Q 为平衡点, 有

$$F_x l_3 + f_1 r = F_z l_4$$

解得

$$f_1 = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(3n-2)mg}{3}$$

$$N_1 = \frac{(3n+1)mg}{3}$$

由 $\mu_1 N_1 \geq f_1$, 可以解得地面的摩擦因数

$$\mu_1 \geq \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(3n-2)}{3n+1}$$

由此可以求出球与地面间的摩擦因数临界值。

3 一层多球的摩擦因数条件

如果顶层球数为 1, 要使一层多球的网球塔可以搭建成功, 则需使顶层与次顶层球心距离 $h < 2R$, OD 是两球心连线的水平投影, 由几何关系知 OD 与竖直方向的夹角为 $\frac{\pi}{A}$, 满足上述条件需要

$$\frac{R}{\sin \frac{\pi}{A}} < 2R, \text{ 得到 } A < 6 \text{ 的结论. 即只需要考虑到正}$$

五边形底面的情况. 一层多球情况几何分析示意图如图 11 和图 12 所示。

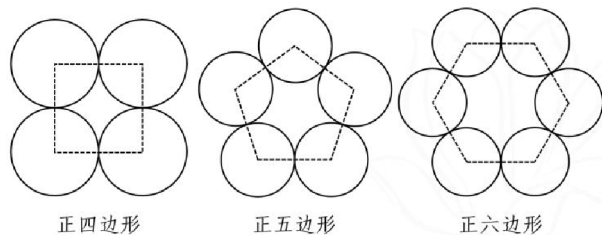


图 11 一层多球几何分析示意图(1)

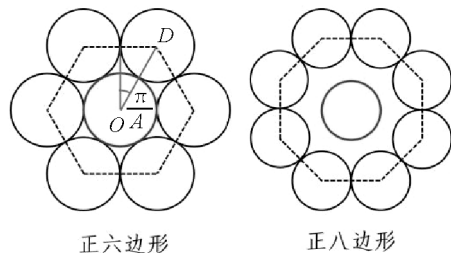


图 12 一层多球几何分析示意图(2)

顶层和次顶层球间的受力关系如图 13 所示。

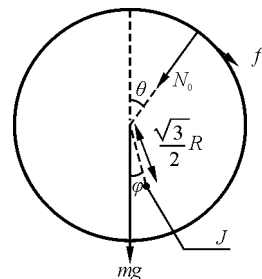


图 13 次顶层球受力分析图

由图 13 分析可得满足平衡条件

$$N_0 \cos \theta + f \sin \theta = \frac{1}{A}mg$$

次顶层球绕接触点连线的轴由力矩平衡可得

$$N_0 d \sin(\theta + \varphi) + mgd \sin \varphi = f[r + d \cos(\theta + \varphi)]$$

对于正四边形, 由图 14 所示的几何分析图可以得出角度关系

$$\sin \theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{\csc \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$$

代入计算可得此时顶层和次顶层间的摩擦因数应该满足条件

$$\mu \geq 1.53859$$

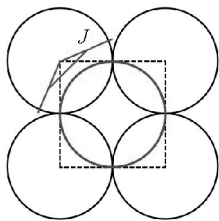


图14 一层4球几何分析图

对于正五边形,由图15所示的几何分析图可以得出角度关系

$$\sin \theta = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\csc \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$$

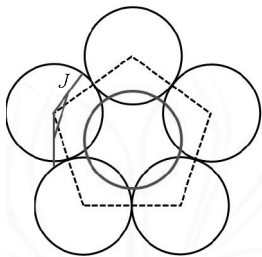


图15 一层5球几何分析图

代入计算可得此时顶层和次顶层间的摩擦因数应该满足条件 $\mu \geq 2$,由此可知,一层4球和一层5球的情况下,要想搭建成功需要的摩擦因数大于 $3n + 1$ 结构所需的摩擦因数。

4 总结

综上所述,可以得到以下结论:

(1) $mn + 1$ 结构搭建的网球塔,越低的层级所需的摩擦因数越小,最高一层网球需要的静摩擦因数最大。

(2)对于 $3n + 1$ 结构,顶层和次顶层的网球之间所需摩擦因数为 $\sqrt{2}$,网球之间的摩擦因数由于压力的增大而减小,不满足平衡所需的摩擦因数时会导致网球塔坍塌。

(3)一层4球和一层5球的情况下,要想搭建成功需要的摩擦因数应大于 $3n + 1$ 结构所需的摩擦因数。

参考文献

- [1] 张怀华. 利用网球搭建九层小塔需要的摩擦条件[J]. 湖南中学物理, 2021, 36(2): 74 - 75.

(上接第156页)

学他的实验室.前一天他的团队已经准备好了75 L的液态空气,整个系统的气密性也检查完毕.上午的主要目标是制备液氢,顺利进行.下午1:30,20 L液氢已经制备完毕.下午2:30,开始液化氦气.下午4:00多,昂内斯的夫人带午饭前来探望,而此时的昂内斯在忙着查看仪表、发指令、转动活栓等等,他的夫人只能不时地给他嘴里塞几片三明治.氦气经过液态空气和液氢的制冷,再经过多孔塞,这样循环多次,温度慢慢下降.晚上7:30,温度计示数停在4 K不动了.在一位同事的建议下,昂内斯查看了最后的成果:在容器中,液氦的气液交界面清晰可见.氦气被液化了。

9 尾声

杜瓦一直忽视理论,发表的文章从来不包括任何理论,他认为实验才是物理前进的动力.而昂内斯则不一样,研究低温对物体性质的改变是他的主要目标.他把整个气体液化实验建立在对范德瓦尔斯的理论验证上,主要是非理想气体的状态方程和对应态定律.对应态定律对于氦气沸点的预测以及实验仪器的建造有着巨大的指导意义。

在气体液化实验中,加高压是常有的事,甚至可以达到两三百个大气压;需要低温,而玻璃容器很容易在低温下破裂甚至爆炸.在杜瓦的实验室,确实发生了多次爆炸,导致两个助手都炸瞎了一只眼睛,自己也差点被炸死.氦气被液化后,荷兰的莱顿成为了地球上温度最低的地方.昂内斯液化了氦气的消息对于杜瓦无疑是一个沉重的打击.杜瓦和他的助手莱尼克斯(Robert Lennox)大吵了一架,争吵当时为什么不用金属器材,这样实验可以进行得更快.在实验中右眼失明,受了多年委屈的莱尼克斯终于爆发了.他冲出了实验室,临走前留下了一句话:我再也不会回来,除非你死掉.他信守了这个诺言。

氦气的液化为这场旷日持久的低温竞赛画上了句号.此后,杜瓦再也没有回到低温物理,转向研究肥皂泡,令人唏嘘.氦气液化后的第三年,昂内斯发现了超导,两年后,他获得了诺贝尔物理学奖。

参考文献

- [1] Dirk van Delft. Freezing Physics: Heike Kamerlingh Onnes and the Quest for Cold[M]. 2008.
- [2] J. S. Rowlinson. Sir James Dewar, 1842 - 1923: A Ruthless Chemist[M]. London: Routledge, 2016.