关于液体压力分析中平均压强的思考

黄 亮
（重庆市南开中学校 重庆 400030）

（收稿日期：2022－10－10）

摘 要：在分析浸没物体表面所受液体压力类问题时，运用平均压强可避开繁难的数学计算迅速求解．但该方法有严格的应用前提，如果不注意物体几何形态与浸没姿态，贸然推广便缺乏必要的严谨性．文章对平均压强的确定方法及其在求解压力中的应用原理进行了理论思考，并结合教学中的 3 类常见实例探讨适用条件．

关键词：液体压力；分析；平均压强

物体浸没时，外表面受到的液体压强往往随位置发生变化，对应的液体压力在中学阶段难以直接计算，但在分析现象时却频繁出现．“平均压强”的引入提供了一种简便有效的解决方法，能帮助学生快速求解，协助教师定量分析．该方法的应用有诸多前提，需要特别注意．且平均压强的确定方法会随浸没面的几何形态与姿态不同而产生差异，情况较复杂．相关教辅资料少有涉及，多定性讨论且结论含混，致使该处师生存疑较多．

1 矩形平面完全浸没

解释浮力产生原因时，教材引出长方体没入水中的例子，如图 1 所示．

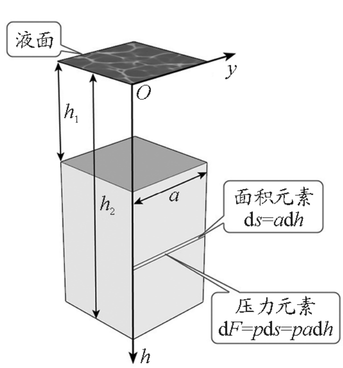

图 1 教材中浮力产生原因举例

强调“长方体两个相对的侧面所受液体的压力相互平衡[1]”．从几何对称的角度给予定性论述．时常有学生提问：能否计算出该面所受压力的具体数值？这是典型的由变压强求取压力的问题，显然超出学生的数学能力与知识储备，无法直接完成．但是该类问题经转化后可用平均压强来处理．

1.1 浸没面竖直

以浸没长方体某侧面为研究对象，建立直角坐标系：h 轴（x 轴）和该面边线重合，且设该边线竖直．y 轴在液面上，如图 1 所示．

在该侧面上取一小块“面积元素”

$$\mathrm{d}s = a\mathrm{d}h$$

面积元素上所受液体压力为

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}s = pa\,\mathrm{d}h$$

由 $p=\rho gh$ 可知：压强的本质是静流体内部应力[2]，理想情况下（忽略液体密度变化）液体内部压强与研究点所在深度成正比，与朝向无关．我们做出 $p-h$ 特性曲线（液体压强-深度曲线），如图 2 所示．

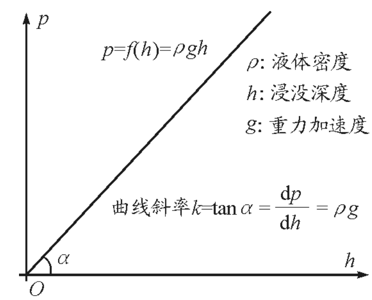

图 2 $p-h$ 特性曲线（压强-深度曲线）

图 2 为一条过原点的倾斜直线，其斜率为

$$k=\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}=\rho g$$

压强 p 是关于 h 的一次函数（正比例），两者成线性关系．该侧面所受液体压力

$$F=\int_{h_1}^{h_2} pa\,\mathrm{d}h = a\int_{h_1}^{h_2} p\mathrm{d}h$$

a 为侧面宽度是常数. 如图 3 所示，式中的 $p\mathrm{d}h$ 对应于 $p-h$ 特性曲线上的窄边梯形的面积[3]. 积分后上式可以理解为 a 与梯形 $ABHG$ 的面积的乘积如图 4 所示.

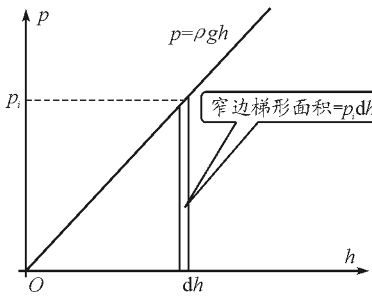

图 3　$p-h$ 特性曲线上的窄边梯形面积

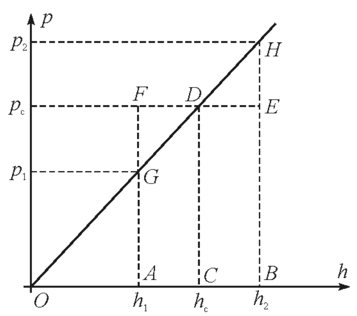

图 4　梯形 $ABHG$ 面积 = 矩形 $ABEF$ 面积

中学阶段，之所以无法直接求解，关键问题就在于"梯形面积"的转化和推导.

$$F=a\int_{h_1}^{h_2}p\,\mathrm{d}h=\int_{h_1}^{h_2}\rho gha\,\mathrm{d}h=$$

$$a\rho g\int_{h_1}^{h_2}h\,\mathrm{d}h=\frac{1}{2}a\rho g(h_2^2-h_1^2)\qquad(1)$$

由式(1) 不难看出求解过程可以转化为用矩形 $ABEF$ 的面积来"等效替代"梯形 $ABHG$ 面积，该矩形与原梯形等宽(AB)，而矩形的高(FA 或 EB) 可认为是梯形中位线(DC) 的长度，恰好是压强曲线的中点值 p_c，也就是侧面中心点(形心) 处深度所对应的压强为 $\rho g\dfrac{(h_2+h_1)}{2}$. 则矩形面积可以表示为 $p_c(h_2-h_1)$. 替代过程的数学实质是"黎曼和" 在"线性变化" 下的一种特例. 观察图 4 可知 $\triangle DEH$ 与 $\triangle DFG$ 全等. 所以，这样的代换在几何上是较好理解的.

替代后，压力

$$F=p_c(h_2-h_1)a$$

其中的 $(h_2-h_1)a$ 项恰好就是所研究侧面的面积. 因此问题可以进一步等效成：所求压力等于受力面积与平均压强的乘积. 便于学生接受.

液体压强随深度线性增加，面积元素不随深度变化，所以"中心处压强" 在数值上恰好就等于"平均压强"，是该方法的核心.

基于这个结论，分析问题时，压力计算可按下列方式进行：

首先求取浸没部分的中心处深度值

$$h_c=\frac{(h_1+h_2)}{2}$$

然后求解平均压强

$$p_c=\rho gh_c=\rho g\frac{(h_1+h_2)}{2}$$

计算浸没面面积

$$S=a(h_2-h_1)$$

最后计算该面所受液体压力

$$F=p_cS=\rho g\frac{(h_1+h_2)}{2}\cdot a(h_2-h_1)=$$

$$\frac{1}{2}a\rho g(h_2^2-h_1^2)$$

计算结果与式(1) 完全一致. 全过程没有超出中学数学范围，学生能较快领悟并掌握.

1.2　浸没面倾斜

将图 1 中长方体绕端面底边线旋转. 使其与竖直方向成 β 角，保持端面完全浸没，底边仍与液面平行，如图 5 所示.

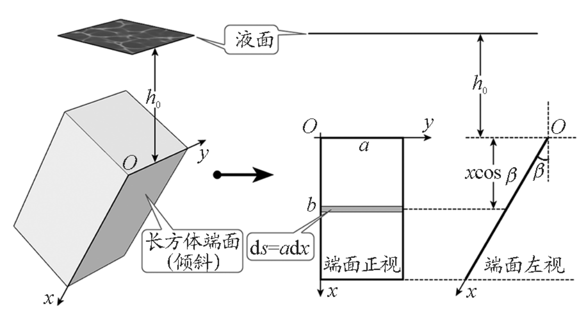

图 5　端面完全浸没且与竖直方向成 β 角

计算该端面所受液体压力为

$$F=\int_0^b\rho g(h_0+x\cos\beta)a\,\mathrm{d}x=$$

$$\rho g\left(h_0b+\frac{b^2}{2}\cos\beta\right)a=$$

$$\rho g\left(h_0+\frac{b}{2}\cos\beta\right)ab\qquad(2)$$

结果中的 $\left(h_0+\dfrac{b}{2}\cos\beta\right)$ 为端面中心(形心) 处深度，$\rho g\left(h_0+\dfrac{b}{2}\cos\beta\right)$ 为中心(形心) 处压强，即平均压强. ab 是端面面积. 若端面面积一定，中心点深度

不变. 则压力值与倾角 β 无关.

结论 1:矩形平面完全浸没时,若有一条边与液面平行,则该面受到的液体压力等于其中心(对角线交点,形心)处压强(即平均压强)与面积的乘积.

2　圆形平面完全浸没

2.1　浸没面竖直

将圆柱体浸没在液体中,令其一个端面(圆形平面)处于竖直状态,该端面最高点距离液面的深度为 h_0 如图 6 所示.

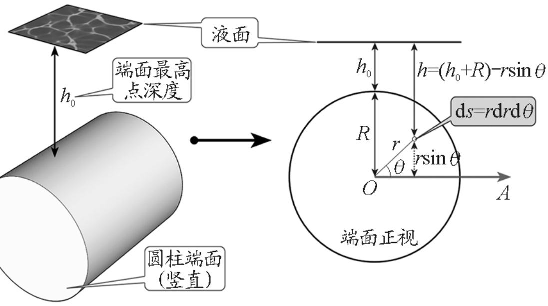

图 6　端面完全浸没且竖直

取此面为研究对象,计算其所受液体压力

$$F=\iint_D \rho g\,(h_0+R-r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho g\,(h_0+R-r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r=$$

$$\int_0^{2\pi}\rho g\left(\frac{h_0R^2}{2}+\frac{R^3}{2}-\frac{R^3}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$\rho g\,(h_0+R)\,\pi R^2 \tag{3}$$

$$D:(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi;0\leqslant r\leqslant R)$$

在式(3)结果中的 (h_0+R),可理解为圆心处深度,$\rho g\,(h_0+R)$ 则为圆心处压强,即平均压强. πR^2 为端面面积.

2.2　浸没面倾斜

将圆柱体浸没在液体中,其一个端面(圆形平面)与竖直方向成 α 角,该端面圆心距离液面的深度为 h 如图 7 所示.

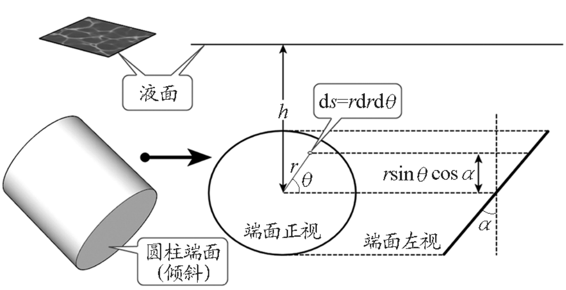

图 7　端面完全浸没且与竖直方向成 α 角

取此面为研究对象,计算其所受液体压力

$$F=\iint_D \rho g\,(h-r\sin\theta\cos\alpha)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$\rho g\int_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R (h-r\sin\theta\cos\alpha)\,r\,\mathrm{d}r=$$

$$\rho g\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{hR^2}{2}-\frac{R^3}{3}\sin\theta\cos\alpha\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$\rho g h\,\pi R^2 \tag{4}$$

$$D:(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi;0\leqslant r\leqslant R)$$

在式(4)结果中的 h 可理解为圆心处深度,$\rho g h$ 则为圆心处压强,即平均压强. πR^2 为端面面积. 倾角 α 积分时被消掉,不对结果造成影响. 说明压力值与 α 无关.

结论 2:圆形平面完全浸没时,所受到的液体压力等于其圆心(形心)处压强(即平均压强)与面积的乘积.

3　三角形平面完全浸没

3.1　浸没面竖直(底边朝下)

将直三棱柱浸没在液体中,令其端面(三角形平面)竖直,且端面中的一条边与液面平行,处于水平状态. 该端面最高点距离液面的深度为 h_0 如图 8 所示.

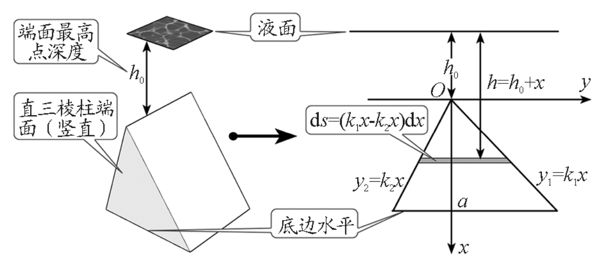

图 8　端面完全浸没且竖直

设坐标原点与顶点重合. 两腰所在直线分别为

$$y_1=k_1x\qquad y_2=k_2x$$

三角形高为 a 如图 8 所示. 取此面为研究对象,则该三角形平面所受液体压力为

$$F=\int_0^a \rho g\,(h_0+x)(k_1x-k_2x)\,\mathrm{d}x=$$

$$\rho g\,(k_1-k_2)\left(\frac{h_0a^2}{2}+\frac{a^3}{3}\right)=$$

$$\rho g\left(h_0+\frac{2a}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}a\,(k_1a-k_2a) \tag{5}$$

结果中的$\left(h_0+\dfrac{2a}{3}\right)$为距三角形顶点$\dfrac{2}{3}$高处深度，由三角形性质可知此处水平线过其重心，因此可理解为三角形重心处深度. 则$\rho g\left(h_0+\dfrac{2a}{3}\right)$为重心处压强，即平均压强. $\dfrac{1}{2}a(k_1a-k_2a)$为该三角形平面的面积.

该情景下的平均压强并不是三角形高的中点处对应的压强. 原因是压强随深度线性增加的同时，面积元 $\mathrm{d}s$ 也随深度线性增加，两者乘积就不再随深度线性变化. 这里的“平均”应该考虑对压力值的影响“权重”是一种“带权平均”. 因此平均压强对应的深度位置更加靠近底边.

总压力只同重心处压强和面积有关，与形状无关. 此情况中，若三角形的高、底不变，k_1、k_2 的取值不影响压力值.

3.2　浸没面倾斜(底边朝下)

将 3.1 中的直三棱柱绕其一条底边旋转. 保持该边水平，端面完全浸没，且和竖直方向成 β 角如图 9 所示.

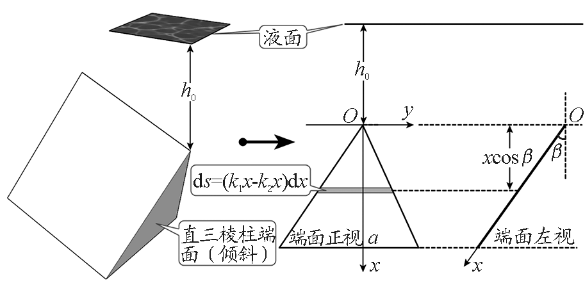

图 9　端面完全浸没且与竖直方向成 β 角

此端面所受液体压力为

$$F=\int_0^a \rho g(h_0+x\cos\beta)(k_1x-k_2x)\,\mathrm{d}x=$$

$$\rho g(k_1-k_2)\left(\frac{h_0a^2}{2}+\frac{a^3}{3}\cos\beta\right)=$$

$$\rho g\left(h_0+\frac{2a}{3}\cos\beta\right)\cdot\frac{1}{2}a(k_1a-k_2a)\qquad(6)$$

结果中的$\left(h_0+\dfrac{2a}{3}\cos\beta\right)$仍为三角形重心所在深度，$\rho g\left(h_0+\dfrac{2a}{3}\cos\beta\right)$为重心处压强，即平均压强. $\dfrac{1}{2}a(k_1a-k_2a)$为三角形面积. 当三角形底边水平时，若重心深度不变，其受到的液体压力与倾斜角度 β 无关.

3.3　浸没面竖直(底边朝上)

将 3.1 中直三棱柱绕 z 轴旋转 π 使端面底边朝上且平行于液面，保持端面竖直，重建坐标系如图 10 所示.

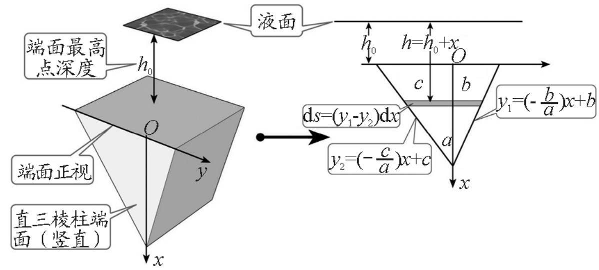

图 10　端面完全浸没且竖直(底边朝上)

则其受到的液体压力为

$$F=\int_0^a \rho g(h_0+x)\left(-\frac{b}{a}x+b+\frac{c}{a}x-c\right)\mathrm{d}x=$$

$$\rho g\left(\frac{ah_0}{2}+\frac{a^2}{6}\right)(b-c)=$$

$$\rho g\left(h_0+\frac{a}{3}\right)\frac{(b-c)a}{2}\qquad(7)$$

结果中的$\rho g\left(h_0+\dfrac{a}{3}\right)$为重心处压强，即平均压强. $\dfrac{(b-c)a}{2}$为三角形面积.

3.4　浸没面倾斜(底边朝上)

将 3.3 中直三棱柱绕 y 轴旋转，使其端面与竖直方向成 β 角，如图 11 所示.

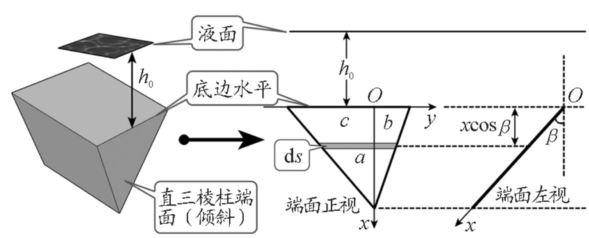

图 11　端面完全浸没且与竖直方向成 β 角(底边朝上)

则该端面所受液体压力为

$$F=\int_0^a \rho g(h_0+x\cos\beta)\left(-\frac{b}{a}x+b+\frac{c}{a}x-c\right)\mathrm{d}x=$$

$$\rho g\left(\frac{ah_0}{2}+\frac{a^2}{6}\cos\beta\right)(b-c)=$$

$$\rho g\left(h_0+\frac{a}{3}\cos\beta\right)\frac{(b-c)a}{2}\qquad(8)$$

结果中的 $\left(h_0+\dfrac{a}{3}\cos\beta\right)$ 为三角形重心所处深度，$\rho g\left(h_0+\dfrac{a}{3}\cos\beta\right)$ 为重心处压强，即平均压强. $\dfrac{(b-c)a}{2}$ 为三角形面积. 当三角形底边水平时，若重心深度不变，其受到的液体压力与倾斜角度 β 无关.

结论 3：三角形平面完全浸没时，若有一条边与液面平行，则该面受到的液体压力等于其重心（形心）处压强（即平均压强）与面积的乘积.

若三角形平面底边不水平，如图 12 所示. 可用水平线将其分割后分别求解，再求总压力. 因此，在求解任意浸没多边形平面所受液体压力时，可先分割成三角形，后再按上述思路水平分割. 1.1 与 1.2 中若矩形面没有边与水平面平行，也可以按此思路进行水平分割.

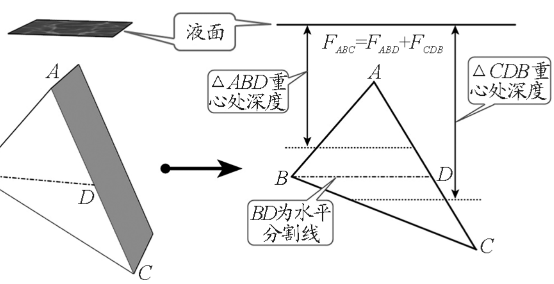

图 12　ABC 为浸没三角形面（过 B 作水平线 BD）

【例题】 试计算浸没直角梯形平面受到的液体压力（底边水平）（图 13）.

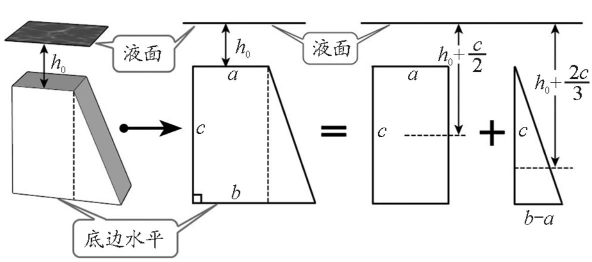

图 13　浸没直角梯形面

解：将梯形沿竖直虚线分割. 矩形面积 $S_1=ac$，平均压强 $p_1=\rho g\left(h_0+\dfrac{c}{2}\right)$，压力为

$$F_1=p_1S_1=\rho g\left(h_0+\frac{c}{2}\right)ac$$

三角形面积 $S_2=(b-a)\dfrac{c}{2}$，平均压强 $p_2=\rho g\left(h_0+\dfrac{2c}{3}\right)$，压力为

$$F_2=p_2S_2=\rho g\left(h_0+\frac{2c}{3}\right)(b-a)\frac{c}{2}$$

则梯形面所受液体压力

$$F=F_1+F_2=\rho g\left(\frac{h_0bc}{2}+\frac{h_0ac}{2}+\frac{bc^2}{3}+\frac{ac^2}{6}\right)$$

验证：按图 14 所示建立坐标系.

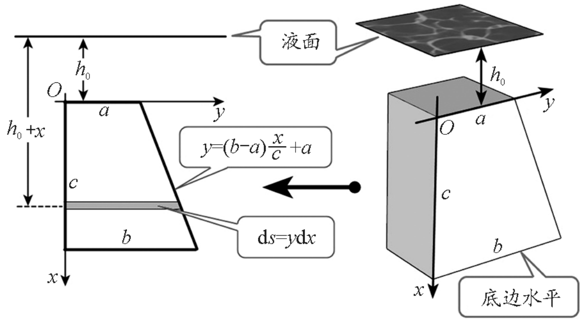

图 14　浸没直角梯形面

取面积元素并积分计算其所受压力

$$F=\int_0^c\rho g(h_0+x)\left(\frac{b-a}{c}x+a\right)\mathrm{d}x=\rho g\left(\frac{h_0bc}{2}+\frac{h_0ac}{2}+\frac{bc^2}{3}+\frac{ac^2}{6}\right)$$

与用平均压强方法计算结果一致.

平均压强也可用于容器平面内壁（方形水池侧壁等）受到的液体压力求解.

4　结束语

当浸没面为平面时，通过合理归类与分割，找准各情况下对应的“平均压强”是关键. 在此基础上，中学教学中出现的大多数此类问题均能用简单的初等几何知识进行定量分析，方便深入地解释有关现象. 以此引导学生对压强、压力以及浮力等与之联系的物理概念及事件形成准确、全面的理解，且不违背基本规律与事实，进而为数理方法的进一步学习积累认知素材.

非圆平面、非多边形平面（如椭圆边、二次函数曲线边、三角函数曲线边等）及曲面等情况需另行分析.

参 考 文 献

[1] 人民教育出版社，课程教材研究所，物理课程教材研究开发中心. 义务教育教科书物理八年级下册[M]. 北京：

人民教育出版社，2012：50.
[2] 郑永令，贾起民. 力学(下册)[M]. 上海：复旦大学出版社，1994：107－114.
[3] 同济大学数学系. 高等数学(上册)[M]. 北京：高等教育出版社，2007：228－231.

On the Consideration of Average Pressure in Liquid Pressure Analysis

HUANG Liang
(Chongqing Nankai Secondary School，Chongqing　400030)

Abstract：When analyzing problems related to the pressure exerted by liquids on submerged objects，the use of average pressure can quickly solve the problem without complex mathematical calculations. However，this method has strict prerequisites. If the geometric shape of the object and its submerged posture are not taken into account，blindly generalizing the method lacks the necessary rigor. This article theoretically considers the method of determining average pressure and its application principle in solving pressure problems，and explores the applicable conditions through three common examples in teaching.

Key words：liquid pressure；analysis；average pressure

(上接第 62 页)

[2] 中华人民共和国教育部. 教育部关于印发《高等学校课程思政建设指导纲要》的通知：教高〔2020〕3 号[A/OL]. (2020－05－28)[2022－08－02]. https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2020－06/06/content_5517606.htm? eqid＝d916c495000758c60000000364609916
[3] 施郁. 评冯端和金国钧的《凝聚态物理学》[J]. 现代物理知识，2017，29(1)：72～72.
[4] 田强，涂清云. 凝聚态物理学进展[M]. 北京：科学出版社，2005.
[5] 朱劲松. 南京大学凝聚态物理学科[J]，物理，2015，44(9)：598～602.
[6] 冯端，金国钧. 凝聚态物理学(上卷)[M]. 北京：高等教育出版社，2003.
[7] 俞健，陈涛，马广兴，等. 固体与半导体物理教学改革及课程思政探讨[J]. 教育教学论坛，2020(35)：289－290.
[8] 陈占林，王建伟，赵志军，等. "固体物理"教学中思政元素的发掘与融合[J]. 教育教学论坛，2021(5)：69－72.
[9] 江苏省教育厅.《关于深入推进全省高等学校课程思政建设的实施意见》(苏教高〔2020〕3 号)[EB/OL]. (2020－07－07)(2022－08－21). http://jyt.jiangsu.gov.cn/art/2020/7/9/art_58366_9307413.html.

Practice on Ideological and Political Education of Curriculum Teaching in Condensed Matter Physics

GONG Longyan
(College of Science，Nanjing University of Posts and Telecommunications，Jiangsu，Nanjing　210023)

Abstract：Condensed matter physics is an extension of solid state physics. It has both rich theoretical content and many practical utility. According to the course characteristic，ideological and political elements from scientist and entrepreneurs are explored. These elements are applied to curriculum objectives，course syllabus，teaching plan，courseware，classroom teaching and final examination. All these steps bring knowledge teaching，ability training and value modeling together. At the same time，students easily accept them.

Key words：condensed matter physics；ideological and political education；teaching practice