电磁场中螺旋线和旋轮线成因及特点的研究

马仕彪
（安徽省濉溪中学　安徽 淮北　235100）

（收稿日期:2022－10－17）

摘　要:带电粒子在电磁场中运动时,往往会形成各种复杂的曲线,其中“螺旋线”和“旋轮线”就是其中最具代表性的两类。关于这两类曲线,很多学者或多或少都研究过,但可能只是浅尝辄止.无论是从物理知识储备还是从高考的应试能力角度看,这两类曲线都是非常重要的,例如2008年高考的江苏卷和2011年、2013年、2015年的福建卷、2022年的全国卷和广东卷都考查了关于旋轮线的问题,2021年高考的山东卷考查了有关螺旋线的问题,由此足见其重要性,而考生的得分率之低却创下历史之最.因此笔者抛砖引玉,将螺旋线和旋轮线的成因及特点进行分析,以期为广大读者分享研究所得.

关键词:电磁场;螺旋线;旋轮线;得分率;研究所得

带电粒子在电磁场中运动时,适当控制电磁场和粒子运动的方向,粒子的轨迹可以形成螺旋线和旋轮线,我们首先研究螺旋线[1].

1　螺旋线

1.1　等螺距螺旋线

如图1所示,一电荷量为$+q$、质量为m带电粒子(不计重力)静置于直角坐标系xOy坐标原点O处,整个空间处于竖直向下、磁感应强度大小为B的匀强磁场中.现给粒子一与x轴夹角为θ斜向下的初速度v_0.

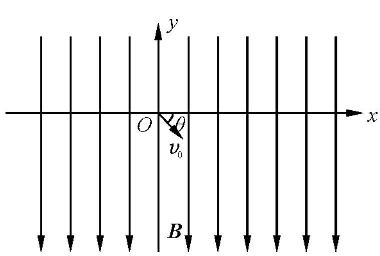


图1　粒子斜射入匀强磁场

因为粒子的速度与磁场方向不垂直,所以,将初速度v_0分别沿水平和竖直方向进行分解.

带电粒子在水平方向上的分速度大小为

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

方向与磁场方向垂直,v_x产生洛伦兹力的大小为

$$F_{洛} = qv_xB$$

该力提供粒子在水平方向上做匀速圆周运动的向心力,即

$$qv_xB = m\frac{v_x^2}{R}$$

因此粒子在水平方向上做半径$R=\dfrac{mv_0\cos\theta}{qB}$、周期$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$的匀速圆周运动.

竖直方向上分速度大小为$v_y = v_0 \sin\theta$,方向与磁场方向平行,因此v_y不产生洛伦兹力,粒子在竖直方向上以速度$v_y = v_0\sin\theta$向下做匀速直线运动.

从合运动的角度看,粒子的合运动为等螺距的螺旋线运动,如图2所示,每两个相邻螺线之间距离即螺距.

$$y = v_yT = \frac{2\pi mv_0\sin\theta}{qB}$$

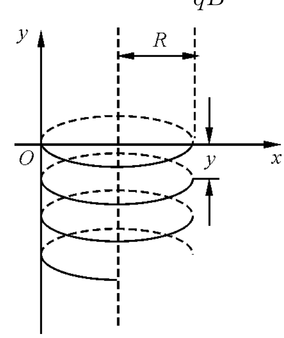


图2　等螺距螺旋线

1.2　螺距增加的螺旋线

在上述的情形下,若再加一个电场强度大小为E、方向竖直向下的匀强电场,其他条件不变,如图3

所示.此时,带电粒子将同时受到水平方向的洛伦兹力和竖直向下的电场力作用.

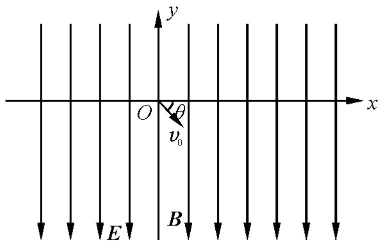


图 3　粒子斜射入相互平行的电场和磁场

在水平方向上,速度分量始终为 $v_x = v_0\cos\theta$,因此粒子在水平方向上仅受大小恒定的洛伦兹力 $F_{洛} = qv_0B\cos\theta$ 的作用,$F_{洛}$ 提供匀速圆周运动的向心力 $F_{洛} = m\dfrac{(v_0\cos\theta)^2}{R}$,粒子在水平方向上仍做半径 $R=\dfrac{mv_0\cos\theta}{qB}$、周期 $T=\dfrac{2\pi m}{qB}$ 的匀速圆周运动.

在竖直方向上,粒子仅受电场力 $F_{电} = qE$ 的作用,粒子做加速度为 $a_y = \dfrac{qE}{m}$ 的匀加速直线运动,速度大小

$$v_y = v_0\sin\theta + \frac{qE}{m}t$$

下落的高度

$$y = v_0 t\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

粒子的合运动为半径 $R=\dfrac{mv_0\cos\theta}{qB}$,做螺距逐渐增加的螺旋线运动,每两个相邻螺线之间螺距差

$$\Delta y = aT^2 = \frac{qE}{m}\left(\frac{2\pi m}{qB}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mE}{qB^2}$$

其轨迹形状如图 4 所示.

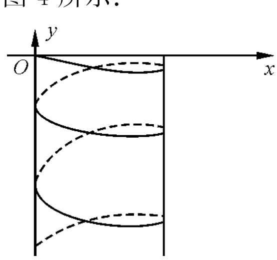


图 4　螺距增加的螺旋线

通过以上分析可以看出,处理有关螺旋线问题时,可以采取运动的分解和合成的方法,这样就能化难为易.螺旋线的最大特征就是在时间和空间上具有一定的周期性,理解了周期性的来源和实质也就能解释和解决实际生活中的有关螺旋线的问题了,实现了理论和实践相结合的目的.

若继续改变电磁场的方向,使之两者方向互相垂直,带电粒子的轨迹将形成旋轮线.

2　旋轮线

2.1　粒子初速度为零的情况

如图 5 所示,空间存在相互垂直的匀强电场和匀强磁场,电场强度大小为 E、方向沿 y 轴正方向,磁感应强度大小为 B、方向沿 z 轴正方向.现有一质量为 m、电荷量为 $+q$ 的带电粒子(不计重力),从坐标原点 O 处由静止开始运动.

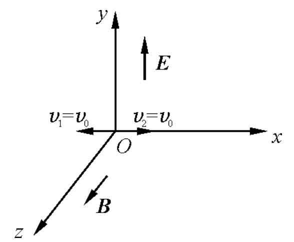


图 5　粒子射入相互垂直的电磁场

对于这种情况,一般采用"构造速度"的技巧,即"配速法".将粒子速度为零的初状态等效为两个沿 x 轴等大反向的匀速直线运动,速度大小 $v_1 = v_2 = v_0$,令 v_2 产生向下的洛伦兹力 $F_{洛} = qv_2B$ 和向上电场力 $F = qE$ 平衡,即 $qv_2B = qE$,粒子以此速度 $v_2 = \dfrac{E}{B}$ 向右做匀速直线运动;速度 v_1 产生的另一个等大向上的洛伦兹力 $F_{洛} = qv_1B$,即粒子以此速率 v_1 在 xOy 平面内沿顺时针方向做匀速圆周运动.

(1) 粒子运动的轨迹[2]

粒子的路径相当于动圆上的一个定点在做纯滚动运动时留下的轨迹,此轨迹线为周期性重复的旋轮线,如图 6 所示.

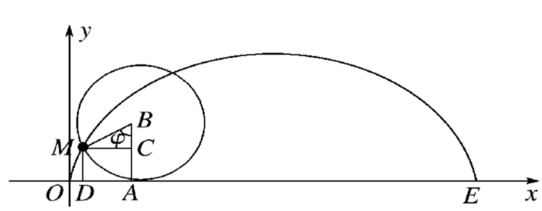


图 6　旋轮线

(2) 粒子的位移[3]

旋轮线的周期为粒子匀速圆周运动的周期,即

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

设粒子圆周运动在 t 时间内转过的角度为 φ,由角速度定义式

$$\varphi=\omega t=\frac{2\pi}{T}t=\frac{qB}{m}t$$

粒子的半径

$$R=\frac{mv_1}{qB}=\frac{mE}{qB^2}$$

在 x 方向上的位移

$$x=v_2t-R\sin\varphi=\frac{E}{B}t-\frac{mE}{qB^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\quad(1)$$

在 y 方向上的位移

$$y=R-R\cos\varphi=\frac{mE}{qB^2}\left[1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]\quad(2)$$

由以上计算结果并结合几何知识可以得到以下几个结论：

① 旋轮线的高为圆周运动的直径

$$y_m=2R=\frac{2mv_0}{qB}=\frac{2mE}{qB^2}$$

② 每一拱旋轮线的宽度 $s=v_2T=2\pi R=\frac{2\pi mE}{qB^2}$，旋轮线与 x 轴交点为

$$x_n=ns=\frac{2n\pi mE}{qB^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

③ 由式(2)可知粒子在 y 方向上做简谐运动，简谐运动的振幅为 $A=\frac{mE}{qB^2}$，在数值上恰好为粒子圆周运动的半径 R.

④ 由式(1)可知粒子在 x 方向上的运动为简谐运动和匀速直线运动的合成.

(3) 粒子的速度

粒子在 x 方向上的速度

$$v_x=v_2-v_1\cos\varphi=\frac{E}{B}\left[1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]$$

在 y 方向上的速度

$$v_y=v_1\sin\varphi=\frac{E}{B}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

合速度

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\frac{E}{B}\sqrt{2\left[1-\cos\left(\frac{qBt}{m}\right)\right]}\quad(3)$$

现讨论粒子的最大速度 v_{m}.

方法 1：由式(3)知 $\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)=-1$ 时速度 v 取到最大值，即

$$v_{\mathrm{m}}=\frac{E}{B}\sqrt{2[1-(-1)]}=\frac{2E}{B}$$

方法 2：因为洛伦兹力永远不做功，只有电场力对粒子做功，在顶点处粒子沿电场力方向位移最大，所以粒子在旋轮线顶点时电场力做功最大，粒子的速度最大，由动能定理

$$qEy_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{m}}^2$$

其中 $y_{\mathrm{m}}=2R$，解得 $v_{\mathrm{m}}=\frac{2E}{B}$.

方法 3：粒子在轨迹的最高点时，两个分速度同向，合速度最大，最大值为

$$v_{\mathrm{m}}=v_1+v_2=\frac{2E}{B}$$

2.2　粒子以初速度 v 沿 x 轴向右运动情况

若粒子以初速度 $v\left(v\neq\frac{E}{B}\right)$ 沿 x 轴向右运动，仍采用“配速法”进行研究.

令粒子的速度为 $v=v_0+\Delta v$，其中 $v_0=\frac{E}{B}$，粒子的运动可视为沿 x 轴正方向以速度 $v_0=\frac{E}{B}$ 的匀速直线运动和速率为 $\Delta v=|v-v_0|$ 的匀速圆周运动，其合运动的轨迹仍为旋轮线.

旋轮线的高为

$$y_{\mathrm{m}}=2R=\frac{2m\Delta v}{qB}=\frac{2m}{qB}|v-v_0|$$

每一拱旋轮线的宽度为

$$s=v_0T=\frac{2\pi mE}{qB^2}$$

旋轮线与 x 轴交点为

$$x_n=ns=\frac{2n\pi mE}{qB^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

现研究粒子以大小不同的初速度 v 向右运动的粒子轨迹情况.

(1) 若速度 $\Delta v>0$，则 Δv 方向向右，Δv 产生的洛伦兹力使粒子在 x 轴下方以顺时针方向匀速圆周运动，下面分情况讨论.

① 如果满足 $0<\Delta v=v_0$，粒子轨迹最低点的合速度为零，轨迹如图 7 所示.

图 7　$\Delta v=v_0$ 时粒子轨迹

② 如果满足 $0<\Delta v<v_0$，粒子轨迹最低点的合速度向右，轨迹如图 8 所示.

图 8　$\Delta v < v_0$ 时粒子轨迹

③ 如果满足 $\Delta v > v_0$，粒子轨迹最低点的合速度向左，轨迹如图 9 所示.

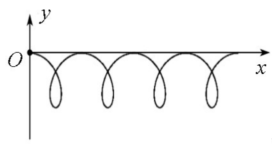


图 9　$\Delta v > v_0$ 时粒子轨迹

(2) 若速度 $\Delta v < 0$，则 Δv 方向向左，Δv 产生的洛伦兹力使粒子在 x 轴上方以速率 Δv 顺时针方向做匀速圆周运动，轨迹如图 10 所示.

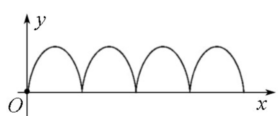


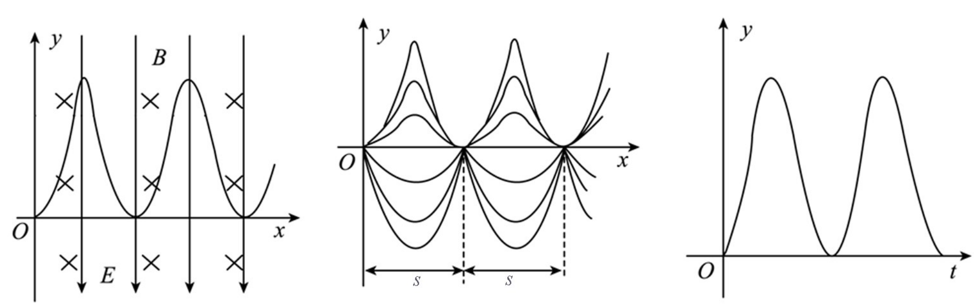
图 10　$\Delta v < 0$ 时粒子轨迹

粒子以初速度 $v\left(v \neq \dfrac{E}{B}\right)$ 沿 x 轴向左运动情况与向右运动情况相似，这里不再赘述.

【例 3】(2011 年福建高考题改编) 如图 11(a) 所示，在 $x > 0$ 的空间中存在沿 y 轴负方向的匀强电场和垂直于 xOy 平面向里的匀强磁场，电场强度大小为 E，磁感应强度大小为 B. 一质量为 m、电荷量为 $q(q > 0)$ 的粒子从坐标原点 O 处以初速度 v_0 沿 x 轴正方向射入，粒子的运动轨迹如图 11(a) 所示，不计粒子的重力. 现只改变入射粒子初速度的大小，发现初速度大小不同的粒子虽然运动轨迹不同，但具有相同的空间周期性，如图 11(b) 所示.

(1) 求粒子在一个周期 T 内沿 x 轴方向前进的距离 S；

(2) 当入射粒子的初速度大小为 v_0 时，其 $y-t$ 图像如图 11(c) 所示，写出 $y-t$ 的函数表达式.



(a)　(b)　(c)

图 11　初速度大小不同的粒子运动

解析：(1) 由以上介绍的方法，设粒子恰好沿 x 轴方向匀速运动的速度大小为 v_1，v_1 满足 $qv_1B = qE$，又 $s = v_1T$，粒子的周期 $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$，解得

$$s = \frac{2\pi mE}{qB^2}$$

(2) 在 y 方向上，由图 11(c) 可以看出旋轮线向上偏，说明 $\Delta v = v_0 - v_1 > 0$.

$y-t$ 函数表达式为

$$y = R - R\cos\theta = \frac{m}{qB}\left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\left(1 - \cos\frac{qB}{m}t\right)$$

其中

$$A = R = \frac{m\Delta v}{qB} = \frac{m}{qB}\left(v_0 - \frac{E}{B}\right)$$

为 y 方向上的简谐运动的振幅.

3　结束语

凡事只要能从原理和本质出发，就能做到大道至简，对问题的认知不仅能知其然更能知其所以然. “螺旋线” 和“旋轮线” 规律性很强，向我们展现了曲线的美感，解决方法归根结底就是运动的合成与分解. 抓住螺旋线和旋轮线这两根线，让它逐渐延伸，打通物理的任督二脉，我们会发现“物理真是迷人”.

参 考 文 献

[1] 赵彦杰. 带电粒子在均匀磁场中的运动轨迹[J]. 德州学院学报，2004，20(6)：37－39.

[2] 王鑫. 利用运动分解分析旋轮线运动中一般过程的时间和位移问题[J]. 物理教学，2021，43(5)：62－63.

[3] 郑金. 旋轮线的性质赏析[J]. 物理教学，2012，34(11)：50－52.