

# 科学计算软件辅助下“传送带”模型的简化处理

郑 磊 赵秋爽 谢天扬

(北京市和平街第一中学 北京 100107)

(收稿日期:2022-10-18)

**摘要:**“传送带”模型是高中运动学综合应用的典型模型,一般将物体在传送带上的运动分为多个过程,应用匀变速直线运动规律联立方程解决问题,解题过程繁琐,特别是传送带带动物体运动的形式复杂多样,对模型的分析难度很大.若是利用 Mathematica(MMA) 科学计算软件,模拟不同初始条件下物体在传送带上的运动过程,绘制运动图像,总结规律,从  $v-t$  图像的角度解决问题,可以极大地降低学生对传送带问题的学习难度.

**关键词:** Mathematica; 科学计算软件; 匀变速直线运动; 传送带问题

## 1 “传送带”模型的常规处理方法

在高中物理一线教学中,一般采用以下方法处

理“传送带”问题:首先分析物体的初速度与传送带速度,确定物体所受摩擦力的方向;将物体的运动分为多个运动过程,列出匀变速直线运动方程,联立求

$$|A'N| = |AN| - |AA'| = 2l - vt$$

结合性质 1 与性质 2, 易得

$$\frac{|Q'A'|}{|A'N|} = \tan \alpha$$

继续作直线  $Q'A'$  垂直于  $AN$ , 与  $QN$  交于点  $Q'$ , 那么, 此时小朋友  $A$  所在点处的曲率半径长即为  $|Q'A'|$ , 根据三角形相似有

$$\frac{|Q'A'|}{|QA|} = \frac{|A'N|}{|AN|}$$

代入数据化简得

$$\rho(t) = |Q'A'| = \frac{\sqrt{3}}{3}(2l - vt)$$

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho(t)} = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l - vt}$$

答毕.

相比于  $t_0$  时刻的加速度, 可以发现这个结果只是将分母中的“ $2l$ ”换成了“ $2l - vt$ ”, 若将  $A'$  看作小朋友运动的新起点, 那这一点便是自洽的, 因为同曲线  $AO$  一样, 剩余曲线仍是一条等角螺线, 且两者互为相似关系, 比例系数便是  $\frac{2l - vt}{2l}$ . 这也体现出等角螺线的

线, 难怪著名数学家雅各布·伯努利希望把它刻在墓碑上来寄托自己“纵然变化, 依然故我”的志向.

## 4 教学启示

总之, 对于追逐问题, 无论采用代数法还是几何法, 只要抓住运动轨迹这一点, 都达到了仅使用一种方法解答全部 3 问的目的, 尤其使用等角螺线几何性质的几何法, 大大降低了追逐问题的求解难度. 可见数理结合法在解决物理竞赛题中有其独特的优越性, 值得推广. 同时在实际教学过程中, 物理竞赛教练也要重视夯实学生的数学基础, 启发学生从多个视角审视同一物理问题, 获取其中的数学模式, 这正是锻炼学生发散思维, 提升学生创新能力的重要途径.

## 参考文献

- [1] 张大同. 物理竞赛教程(高中第一分册)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 22.
- [2] 吕艳坤. 一道运动学竞赛试题的多解赏析[J]. 物理教学, 2020(7): 68-69, 73.
- [3] 钟云杰, 柏露枝. 数理结合的赛题典例——第 35 届全国中学生物理竞赛预赛第 6 题的 4 种解法[J]. 物理教师, 2019, 40(6): 95-97.
- [4] 黄晶. 迷人的等角螺线[J]. 物理教师, 2008(3): 31-32.

解. 但是此类问题需要考虑的条件很多, 传送带正转反转、设置角度、运行速度以及物体的初速度都会影响整个运动过程, 这使得传送带问题变得复杂多样, 求解困难.

如图 1 所示, 传送带与水平面夹角为  $\theta$ , 并以  $v$  逆时针运行, 在传送带的 A 端轻轻放一个小物体, 物体与传送带之间的动摩擦因数为  $\mu (\mu < \tan \theta)$ , AB 长  $L$ , 分析物体从 A 到 B 所用的时间.

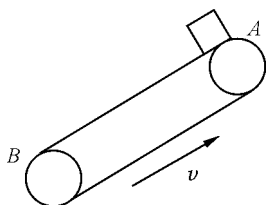


图 1 传送带模型教学示意

首先分析物体运动过程, 轻放物体初速度为零, 此时物体速度小于传送带速度, 如图 2(a) 所示, 所受滑动摩擦力沿传送带方向向下, 则物体在重力分力与滑动摩擦力作用下(二力之和)做匀加速直线运动; 如图 2(b) 所示, 当物体的速度大于传送带速度时, 所受滑动摩擦力沿传动带方向向上, 且滑动摩擦力小于重力分力, 物体在二力之差作用下做匀加速直线运动. 由此可将物体的运动分为两个加速度不同的运动, 联立运动学方程解得物体运动的总时间.

$$v_{\text{传}} = a_1 t_1$$

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

$$x_2 = L - x_1 = v_{\text{传}} t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

$$t_{\text{总}} = t_1 + t_2$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta}{m} \\ a_2 = \frac{mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta}{m} \end{cases} \quad (1)$$

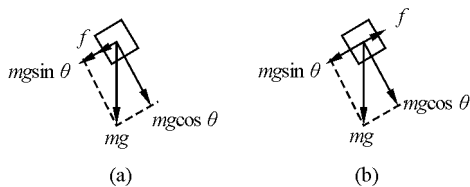


图 2 受力分析

当然, “传送带” 问题并不仅此一例, 若滑动摩擦力大于重力分力, 物体在传动带上的运动就会由

匀加速运动变为匀速运动; 若传送带顺时针转动, 物体的加速度又会发生变化; 若物体的初速度不为零, 则运动状态将再次发生变化. 显然, 传动带带动物体运动的表达式过于繁多复杂, 如此复杂的过程学生分析起来十分费力, 且学生的前概念中没有处理过多个过程叠加的运动, 很难想象出物体的真实动态过程, 不容易取得良好的学习效果.

基于以上问题, 利用 MMA 科学计算软件就可以轻松帮助我们解决. 该软件可以支持数值和符号计算引擎、图形系统、编程语言、文本系统等多种模式的交互式组合, 3D 动画演示功能的开发比较成熟<sup>[1]</sup>. 中学教师可以利用 MMA 的 3D 建模与绘图功能, 带领学生对物体的运动进行分析.

## 2 Mathematica 软件模拟“传送带”运动过程

应用 MMA 软件分析“传送带”问题的大致思路如下: 建立物体的动力学微分方程, 仿真模拟其运动轨迹, 通过改变不同的初始条件绘制物体运动的  $v-t$  图像, 引导学生结合图像观察物体在传送带上的运动状态, 将物体  $v-t$  图像分类汇总, 总结规律, 并运用规律解决实际问题.

利用 MMA 软件的数值模拟功能, 笔者建立了物体在传送带上的运动模型. 为了方便处理, 设物体质量  $m=1 \text{ kg}$ , 初速度  $v=4 \text{ m/s}$ , 物体与传送带之间的动摩擦因数  $\mu=0.4$ , 传送带以  $v_0=2 \text{ m/s}$  逆时针匀速转动且与地面的夹角  $\theta=37^\circ$ , 得到物体的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \theta + f \quad (2)$$

滑动摩擦力的方向取决于物体相对于传送带的运动速度

$$f = \begin{cases} -\mu mg \cos \theta & (v > v_0) \\ \mu mg \cos \theta & (v < v_0) \end{cases} \quad (3)$$

在 MMA 软件中将式(3)代入式(2)中进行数值求解<sup>[2]</sup>, 即可得到物体在传送带上的轨迹坐标  $[x(t), y(t)]$ , 再通过软件的 3D 动画功能即可模拟物体的运动情况, 如图 3 所示.

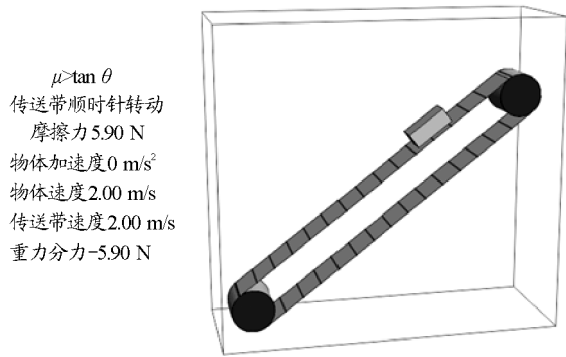


图 3 传送带模型

### 2.1 动摩擦因数 $\mu > \tan \theta$

若动摩擦因数  $\mu > \tan \theta$  (其中包括传送带水平放置在地面上的情况, 其与地面夹角  $\theta = 0$ ), 物体运动的  $v-t$  图像如图 4 所示. 通过图 4 可以总结出物体运动规律: 无论传送带正转还是反转, 物体速度图像最终都会向传送带速度图像靠拢. 利用该图像解决传送带问题就显得尤为轻松. 图 4 中图像的斜率表示物体运动的加速度, 如果物体的速度大于传送带速度, 加速度大小为  $\mu g \cos \theta$  与  $g \sin \theta$  之和; 如果物体的速度小于传送带速度, 加速度大小为  $\mu g \cos \theta$  与  $g \sin \theta$  之差; 图 4 中物体速度图像与  $t$  轴围成的面积则表示物体的位移. 运用  $v-t$  图像的斜率与面积可以轻松解得物体在传送带上运动的总时间, 此结果与之前联立匀加速直线运动方程所得结果一致, 但大大降低了求解难度.

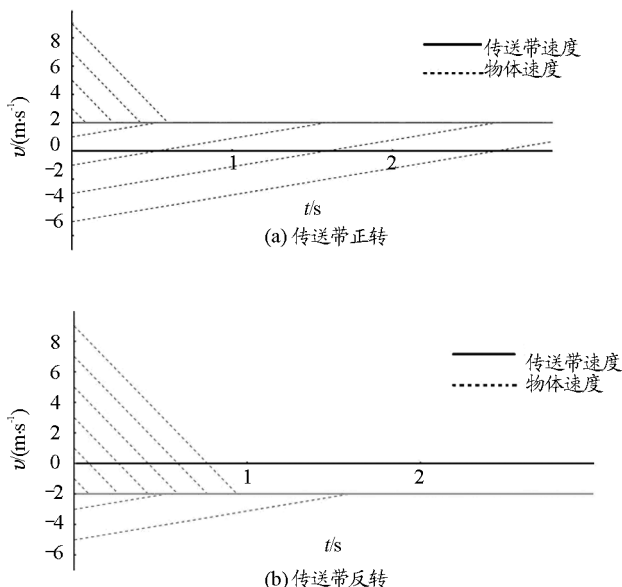


图 4 动摩擦因数  $\mu > \tan \theta$

### 2.2 动摩擦因数 $\mu < \tan \theta$

如图 4 一样, 若动摩擦因数  $\mu < \tan \theta$ , 物体运动的  $v-t$  图像如图 5 所示. 通过图 5 可以总结出物体运动规律: 无论传送带正转还是反转, 物体运动的加速度均为负值, 但是运动状态存在拐点 (物体速度与传送带速度相同时). 对于图像中的物体加速度与位移分析结果与图 4 一致, 不再过多阐述.

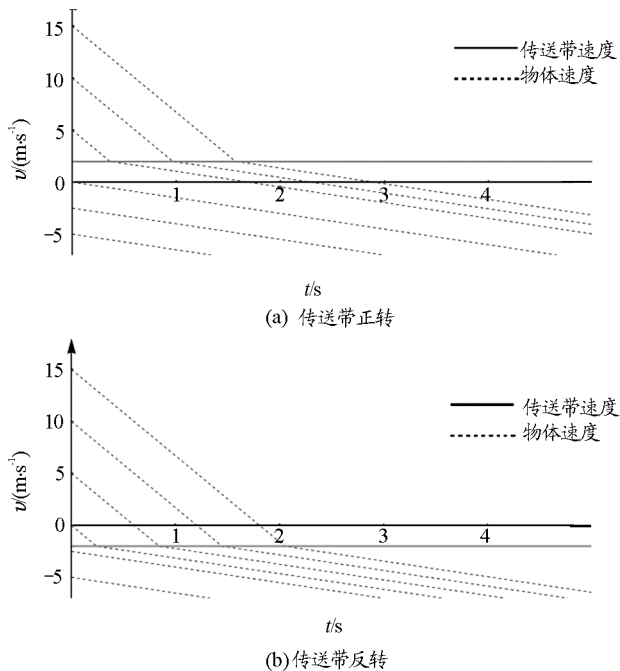


图 5 动摩擦因数  $\mu < \tan \theta$

### 3 “传送带”模型简化处理的应用示例

**【例 1】**如图 6 所示, 传送带与水平面夹角为  $37^\circ$ , 并以  $v = 10 \text{ m/s}$  运行, 在传送带的 A 端轻轻放一个小物体, 物体与传送带之间的动摩擦因数  $\mu = 0.5$ , AB 长 16 m, 求: 以下两种情况下物体从 A 到 B 所用的时间.

- (1) 传送带顺时针方向转动;
- (2) 传送带逆时针方向转动.

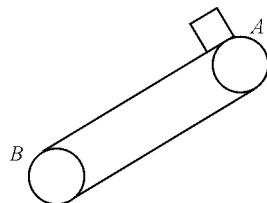


图 6 例 1 配图

(1) 传送带若顺时针转动  $v > 0$ , 与地面的夹角为  $37^\circ$ , 由此可得  $\mu < \tan \theta$ , 物体初速度为零, 小于

传送带速度,则加速度为  $g \sin \theta - \mu g \cos \theta$ , 绘出  $v-t$  图像如图 7 所示.

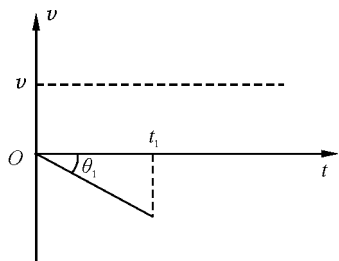


图 7 传送带顺时针方向转动

物体轻放在 A 点初速度为零,小于传送带速度,可知物体的运动图像为一条斜向下的直线,不存在拐点,加速度大小为  $g \sin \theta - \mu g \cos \theta$ ,图 7 中三角形的面积表示为传送带长度,通过图 7 即可得到物体运动时间  $t_1$ .

$$a_1 = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$$

$$S_{\Delta} = L = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

代入数据得

$$a_1 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$t_1 = 4 \text{ s}$$

(2) 传送带若逆时针转动,则  $v < 0$ ,由于  $\mu < \tan \theta$ ,物体初速度为零,大于传送带速度,可知物体的运动图像存在拐点,分为两部分,速度图像如图 8 所示:第一阶段物体速度大于传送带速度,加速度大小为  $g \sin \theta + \mu g \cos \theta$ ,三角形的面积表示为物体第一阶段的位移;第二阶段物体速度小于传送带速度,加速度大小为  $g \sin \theta - \mu g \cos \theta$ ,梯形的面积表示为物体第二阶段的位移.

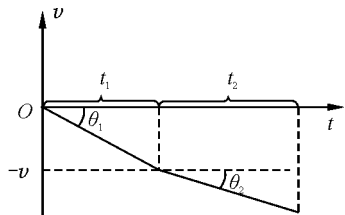


图 8 传送带逆时针方向转动

通过图 8 即可得到物体第一阶段运动时间  $t_1$  与位移  $x_1$ .

$$a_1 = g \sin \theta + \mu g \cos \theta$$

得

$$a_1 = 10 \text{ m/s}^2$$

由

$$t_1 = 1 \text{ s} \quad S_{\Delta 1} = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

得

$$S_{\Delta 1} = 5 \text{ m}$$

通过图 8 第二阶段梯形的面积得到物体的运动时间  $t_2$ .

$$a_2 = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$$

得

$$a_2 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$S_{\Delta 2} = L - S_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot (v + v + a_2 t_2) t_2$$

得

$$S_{\Delta 2} = 11 \text{ m}$$

由此得

$$t_2 = 1 \text{ s}$$

$$t_{\text{总}} = t_1 + t_2 = 2 \text{ s}$$

显然,将“传送带”模型简化处理后,通过运动图像,利用图像的斜率与面积关系,可以极好地简化解题难度,大大减少运算量,提高解题的正确率,较联立匀变速直线运动方程的一般解题方法更为简单准确.

综上所述,在解决传送带问题上,通过判断动摩擦因数与传送带倾角正切值(摩擦力与重力分力)的大小关系,巧妙运用  $v-t$  图像中的斜率与面积能够快速得到物体运动的总时间.学生在之前的学习中已经学习了  $v-t$  图像,利用数形结合的方式绘制  $v-t$  图像,能够更加直观地展示物体受力与运动间的逻辑关系,再结合模拟动画过程,学习起来更为直接和简单,有效地降低了学习难度,取得更好的学习效果.

### 参考文献

- [1] 江俊勤. 基于 Mathematica 的数字化物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 184-187.
- [2] 董键. Mathematica 与大学物理计算[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010: 8-10.