投影“合成法”求解匀强电场的电场强度

王良翼
（成都市树德中学　四川 成都　610031）
罗　攀
（攀枝花市第七高级中学校　四川 攀枝花　617005）
吴　衡
（成都市郫都区嘉祥外国语学校　四川 成都　611730）

（收稿日期：2022-10-19）

摘　要：已知匀强电场中任意不共线 3 个点的电势，可以通过电势等分法求解匀强电场的电场强度，也可以通过投影“合成法”求解电场强度. 通过对传统合成法深度分析，提出投影“合成法”，并指出投影“合成法”的本质是分解，而不是合成.

关键词：匀强电场；电场强度；合成法；投影

在匀强电场中，若已知电场强度，可以根据公式 $U=Ed$ 求解任意两点的电势差，如果确定空间某点为零电势点，则可以确定空间其他点的电势. 反知，如果在平行于匀强电场中的平面内，给定任意不共线 3 个点的电势，可以求出此匀强电场的电场强度. 在匀强电场中，平行相等的线段对应的电势差相等，确定等势点，画出等势线和电场线，根据公式 $E=\dfrac{U}{d}$ 求解电场强度的大小，沿电场线方向电势降低确定电场强度的方向，这种方法称为电势等分法. 根据电场强度的矢量性，先求出电场强度在两个方向的投影分量，再根据投影分量与电场强度的关系求出电场强度，这种方法称为投影“合成法”，此方法中的“合成”与传统意义上的合成法存在较大差异：传统意义上的合成法，由两个分矢量合成得到合矢量，满足平行四边形法则，但是投影“合成法”中的两个投影分量直接合成不一定能得到合矢量，不满足平行四边形法则，需要利用投影分量与合矢量的分解关系求解合矢量.

【题目】 如图 1 所示，平行于纸面有一匀强电场，处在该电场中 A、B、C 3 点的电势分别为 12 V、8 V、2 V，已知 A、B 连线与 B、C 连线夹角为 60°，$AB=4.0$ cm，$BC=6.0$ cm，则该匀强电场的场强大小和方向分别为（　　）

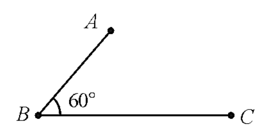

图 1　A、B、C 3 点空间分布示意图

A. 100 V/m，与 BC 成 60° 斜向右下方

B. 200 V/m，与 BC 成 60° 斜向右下方

C. 100 V/m，与 BA 成 60° 斜向左上方

D. 200 V/m，与 BA 成 60° 斜向左上方

1　电势等分法

电势等分法的步骤：

(1) 找等势点，作等势线（依据：匀强电场中电势随空间均匀变化）；

(2) 确定场强的方向（依据：电场线垂直于等势线，沿电场线方向电势降低）；

(3) 确定场强的大小 E（依据：匀强电场中场强与电势差关系式 $E=\dfrac{U}{d}$）.

延长 AB 至 D，使 $BD=6$ cm，点 D 的电势为 2 V，点 C 与点 D 的电势相等，连接 CD，因匀强电场的等势线为直线，则 CD 为等势线，过点 B 作 CD 的垂线，垂足为 H，BH 为一条电场线，如图 2 所示. 电场强度的大小为

$$E=\frac{U_{BH}}{d_{BH}}=\frac{8\ \text{V}-2\ \text{V}}{3\times10^{-2}\ \text{m}}=200\ \text{V/m} \tag{1}$$

电场强度的方向：与 BC 成 60°，方向斜向右下，所以答案为选项 B.

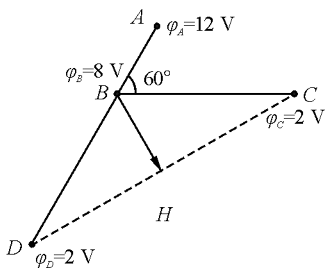

图 2 电势等分法示意图

2 投影“合成法”

2.1 合成法

电势沿 AB 方向降低，则电场强度在 AB 方向的分量为

$$E_{AB}=\frac{U_{AB}}{d_{AB}}=\frac{12\ \mathrm{V}-8\ \mathrm{V}}{4\times10^{-2}\ \mathrm{m}}=100\ \mathrm{V/m} \qquad (2)$$

电势沿 BC 方向降低，则电场强度在 BC 方向的分量为

$$E_{BC}=\frac{U_{BC}}{d_{BC}}=\frac{8\ \mathrm{V}-2\ \mathrm{V}}{6\times10^{-2}\ \mathrm{m}}=100\ \mathrm{V/m} \qquad (3)$$

两个方向电场强度分量合成即为合电场强度，如图 3 所示. 电场强度的大小为

$$E=100\ \mathrm{V/m} \qquad (4)$$

电场强度的方向与 BC 成 60°，方向斜向右下，所以答案为选项 A. 合成法得出的结果与电势等分法存在较大差异，产生这种差异的原因是什么？这需要对合成法求解电场强度进行近一步研究.

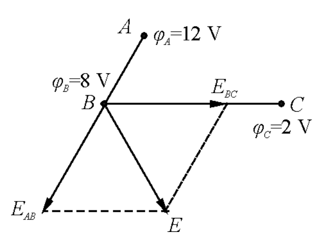

图 3 合成法示意图

2.2 合成法分析

电场是一种客观存在的物质，电场强度是描述电场本身性质的物理量，在电场中某方向的场强是唯一确定的[1]. 如图 4 所示，电场强度在 OA 方向的分量 $E_1=E\cos\theta_1$，电场强度在 OB 方向的分量 $E_2=E\cos\theta_2$. 若已知 OA 和 OB 方向的电场强度投影分量 E_1、E_2，求合电场强度 E. 当两个分量相互垂直时，可以直接矢量合成 E_{12}，E_{12} 即 E.

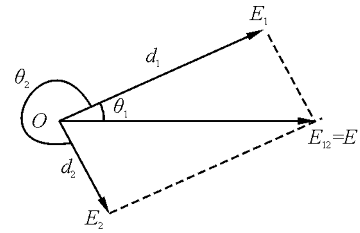

图 4 电场分量相互垂直合成示意图

当两个分量不相互垂直时，将两个分量直接合成 E_{12}，E_{12} 与 E 存在差异，如图 5 所示.

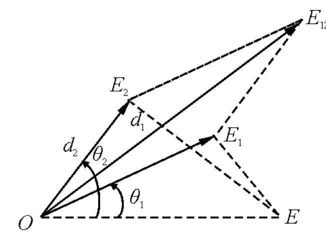

图 5 电场分量不相互垂直合成示意图

下面我们从矢量合成的数学方法上论证我们的结论.

如图 5 所示，两个分量 E_1、E_2 直接矢量合成为 E_{12}，E_{12} 的大小为

$$\begin{aligned}E_{12}&=\sqrt{E_1^2+E_2^2+2E_1E_2\cos(\theta_2-\theta_1)}=\\&[E^2\cos^2\theta_1+E^2\cos^2\theta_2+\\&2E^2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \qquad (5)$$

特殊情况下，两个分量相互垂直，即角度满足关系式

$$|\theta_2-\theta_1|=\frac{\pi}{2}(2k-1)\quad(k=1,2,3) \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}E_{12}&=\sqrt{E^2\cos^2\theta_1+E^2\cos^2\theta_2}=\\&\sqrt{E^2\cos^2\theta_1+E^2\sin^2\theta_1}=E\end{aligned} \qquad (7)$$

式(7) 表明，当 E_1 与 E_2 相互垂直时，此两个分量直接矢量合成得到的矢量 E_{12} 即为合电场强度 E，所以两电场分量垂直时，可以直接利用矢量合成求解合电场强度.

一般情况下，当 E_1、E_2 不相互垂直，此两个分量直接矢量合成得到的矢量 E_{12} 与合电场强度 E 存在较大差异，所以两个电场分量不垂直时，不能直接矢量合成求合电场强度，需要寻找更加优秀的“合成法”.

2.3 正交投影“合成法”

由 2.2 的讨论，如果能求到两个相互垂直方向的电场强度的分量，可以直接合成电场强度的分量，就可以得到合电场强度. 如图 6 所示，过 A 点作 BC 的垂线，垂足为 F，在三角形 ABF 中，$d_{AB}=4$ cm，

$d_{BF}=2\ \text{cm}$，$d_{AF}=2\sqrt{3}\ \text{cm}$，点 F 的电势为 $\varphi_F=6\ \text{V}$. 电势沿 BC 方向降低，则电场强度在 BC 方向的分量为

$$E_{BC}=\frac{U_{BC}}{d_{BC}}=\frac{8\ \text{V}-2\ \text{V}}{6\times10^{-2}\ \text{m}}=100\ \text{V/m} \tag{8}$$

电势沿 AF 方向降低，则电场强度在 AF 方向的分量为

$$E_{AF}=\frac{U_{AF}}{d_{AF}}=\frac{12\ \text{V}-6\ \text{V}}{2\sqrt{3}\times10^{-2}\ \text{m}}=100\sqrt{3}\ \text{V/m} \tag{9}$$

两个方向电场强度分量合成即为合场强. 合电场强度的方向与 BC 成 60°，方向斜向右下，合电场场强大小为

$$E=\sqrt{E_{BC}^2+E_{AF}^2}=200\ \text{V/m} \tag{10}$$

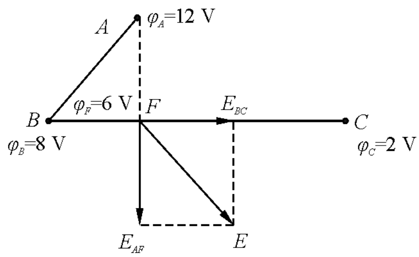

图 6　正交投影“合成法”示意图

2.4　投影“合成法”

合电场强度和某方向电场强度的分量满足投影关系，合电场强度和另一方向电场强度的分量也满足投影关系，电场强度 E 在 AB 方向的分量 $E_{AB}=100\ \text{V/m}$，电场强度 E 在 BC 方向的分量 $E_{BC}=100\ \text{V/m}$，由几何对称关系可知，E、E_{AB}、E_{BC} 的矢量末端和点 B 共圆，圆的直径表示电场强度 E，如图 7 所示. 电场强度的大小为 $E=200\ \text{V/m}$，电场强度的方向与 BC 成 60°，方向斜向右下.

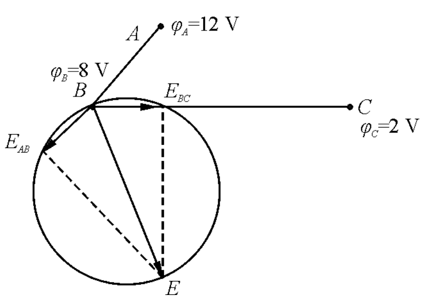

图 7　投影“合成法”示意图

2.5　投影“合成法”求解一般情况下的电场强度

已知电场强度在 OA 方向的分量为 E_1，OB 方向的分量为 E_2，两个分量的夹角为 θ，如何求解电场强度 E？

2.5.1　几何方法

以 OA 表示 E_1，OB 表示 E_2，OC 表示 E，$AC\perp OA$，$BC\perp OB$，所以 O、A、B、C 4 点共圆，如图 8 所示，由几何关系可以计算得

$$AB=\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta} \tag{11}$$

$$BD=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}}{2} \tag{12}$$

$$O'B=\frac{BD}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}}{2\sin\theta} \tag{13}$$

$$OC=2O'B=\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}}{\sin\theta} \tag{14}$$

从而电场强度的大小

$$E=\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}}{\sin\theta} \tag{15}$$

电场强度的方向

$$\cos\alpha=\frac{OF}{OO'}=\frac{\frac{E_1}{2}}{\frac{E}{2}}=\frac{E_1}{E}=$$

$$\frac{E_1}{\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}}{\sin\theta}}=$$

$$\frac{E_1\sin\theta}{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}} \tag{17}$$

$$\alpha=\arccos\frac{E_1\sin\theta}{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}} \tag{18}$$

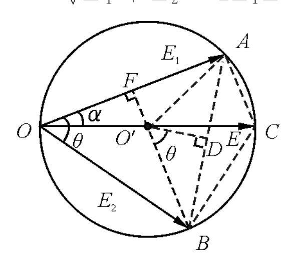

图 8　合电场强度与分电场强度的投影分量关系图

2.5.2　数学方法

如图 8 所示，合电场强度 E 与投影分量 E_1、E_2 的关系满足

$$E\cos\alpha=E_1 \qquad E\cos(\theta-\alpha)=E_2 \tag{19}$$

$$\cos\alpha=\frac{E_1}{E} \qquad \sin\alpha=\frac{\sqrt{E^2-E_1^2}}{E} \tag{20}$$

式(19)变形并代入式(20)，得到

$$E(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=$$

$$E\cos\alpha\cos\theta+E\sin\alpha\sin\theta \tag{21}$$

$$E\cos\alpha\cos\theta+E\sin\alpha\sin\theta=$$

$$E_1\cos\theta+\sqrt{E^2-E_1^2}\sin\theta=E_2 \tag{22}$$

解得

$$E=\frac{\sqrt{E_1^2+E_2^2-2E_1E_2\cos\theta}}{\sin\theta} \tag{23}$$

$$\alpha = \arccos \frac{E_1 \sin \theta}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta}} \qquad (24)$$

2.5.3 类比思维

【例题】(2013 年高考上海物理卷第 20 题) 如图 9 所示为在平静海面上两艘拖船 A、B 拖着驳船 C 运动的示意图. A、B 的速度分别沿着缆绳 CA、CB 方向,A、B、C 不在一条直线上. 由于缆绳不可伸长,因此 C 的速度在 CA、CB 方向的投影分别与 A、B 的速度相等,由此可知 C 的(　　)

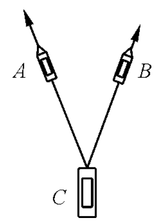

图 9　船 A、B、C 运动示意图

A. 速度大小可以介于 A、B 的速度大小之间

B. 速度大小一定不小于 A、B 的速度大小

C. 速度方向可能在 CA 和 CB 的夹角范围外

D. 速度方向一定在 CA 和 CB 的夹角范围内

本题主要的问题聚焦于船 C 的速度,归于研究合速度和分速度的关系. 船实际发生的运动为合速度 v_C,船速 v_C 在 CA 方向的分速度为 v_A,在 CB 方向的分速度为 v_B,由以上分析可知,不能直接合成 v_A、v_B 得到 v_C,v_A、v_B 与 v_C 满足投影关系,如图 10 所示.

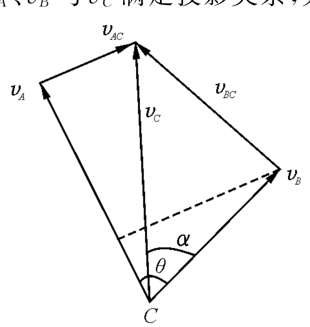

图 10　A、B、C 速度关系图

由几何关系

$$v_A = v_B \cos\theta + v_{BC}\sin\theta \qquad (25)$$

$$v_{BC} = \frac{v_A - v_B\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (26)$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_{BC}^2} = \frac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_Av_B\cos\theta}}{\sin\theta} \qquad (27)$$

$$\cos\alpha = \frac{v_B}{v_C} = \frac{v_B\sin\theta}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_Av_B\cos\theta}} \qquad (28)$$

v_A、v_B 与 v_C 满足投影关系,E_1、E_2 与 E 也满足投影关系,可以通过类比思维,v_A 与 E_1 对应,v_B 与 E_2 对应,v_C 与 E 对应,从而直接得到电场强度的大小及方向

$$E = \frac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta}}{\sin\theta} \qquad (29)$$

$$\alpha = \arccos \frac{E_1\sin\theta}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta}} \qquad (30)$$

由图 10 及式(29)、(30) 可知,本题答案为选项 B、C.

2.5.4 解决问题

回到本题,电场强度在两个方向的分量分别为

$$E_1 = 100\ \text{V/m} \qquad E_2 = 100\ \text{V/m}$$

两个分量的夹角 $\theta = 120°$,代入式(16)、(18) 得

$$E = 200\ \text{V/m} \qquad \alpha = 60°$$

示意图如图 11 所示.

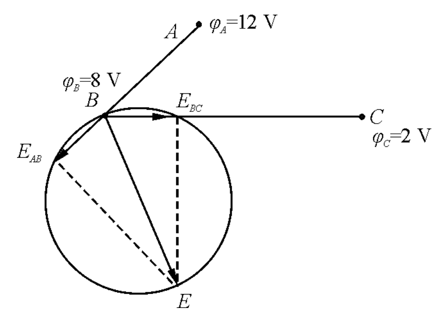

图 11　投影"合成法"示意图

3　总结与反思

已知不共线的 3 个点的电势,可以通过电势等分法求解电场强度的大小和方向,这种方法思维难度低,操作步骤繁琐,对于电势为纯字母运算求解等势点及两等势面之间的距离时,计算量极大[2]. 矢量合成的本质是,合矢量由两个分矢量合成,而非任意两个分量直接合成. 电场强度投影"合成法"的本质是一种分解方法,通过合电场强度在任意两个方向的投影,利用数学几何方法直接求解合电场强度. 当投影分量相互垂直时,可以直接利用矢量合成求解合电场强度,当投影分量不垂直而成任意角度,可以利用投影"合成法"直接求解合电场强度的大小及方向.

参 考 文 献

[1] 段石峰. 对"合成法"求解匀强电场中电场强度的修正[J]. 物理教学,2022(6):48-50.

[2] 隆勇. 简捷求解一类匀强电场典型问题的解析式[J]. 物理教师,2019(9):60-61.