

# “数学物理方法”中关于希尔伯特空间的教学改革实践\*

马艳姣 尹 笋

(山东大学物理学院 山东 济南 250100)

(收稿日期:2022-11-05)

**摘要:**目前国内物理专业为期一学期的“数学物理方法”课程多缺乏对于希尔伯特空间及相关概念的讲解,然而此部分内容对于物理专业的后续学习非常重要.为了提高“数学物理方法”课程的教学效果,针对希尔伯特空间部分进行了教学改革实践.本文阐述了本次教学改革的教学安排和授课内容,展示了收集到的效果反馈,并对其进行了讨论和分析,从而得出一些具有建设性的改革方向,为大家进一步教学改革提供参考.

**关键词:**数学物理方法;教学改革;希尔伯特空间;量子力学;学生反馈与分析

数学物理方法作为物理专业本科期间的一门重要课程,旨在运用数学的语言和方法来解决物理问题.数学物理方法一般包括复变函数论和数学物理方程两部分,通过对一些数学方法的学习,为后续的量子力学等物理课程乃至一些研究生课程的学习打下基础.

在数学物理方程部分,一般从数学物理遇到的典型的定解问题开始,将物理问题用偏微分方程表达出来,称为数学物理方程.在给定的定解条件下,求解数学物理方程,称为数学物理定解问题.求解定解问题的一个基本解法是分离变数法,其基本思想是把偏微分方程分解成几个常微分方程.当常微分方程附以边界条件,则成为本征值问题.满足边界条件的非零解仅在方程的参数取某些特定值时才存在,这些特定值叫做本征值,相应的非零解叫做本征函数.

常见的本征值问题一般归结为施图姆-刘维尔本征值问题.若函数具有连续一阶导数和分段二阶导数,且满足本征函数所满足的边界条件,就可以展开为广义傅里叶级数.为便于学生们更加深刻地理解广义傅里叶展开,教材中一般会引入希尔伯特空间的介绍,例如梁昆森先生等所著的《数学物理方法》一书中,用半页的篇幅,类比矢量的正交、投影等概念简单介绍了带权重的正交关系、广义傅里叶

展开以及完备性的概念.相关介绍到这里便戛然而止,并未对希尔伯特空间作严格定义,只简单将其描述为“某种无限维空间”<sup>[1]</sup>.然而此表述不完全准确,容易引起学生误解.

希尔伯特空间的概念对量子力学是非常重要的,是量子力学背后严格的数学框架的一部分.数学物理方法中对希尔伯特空间讲解的不足,会加大学生在学习量子力学时的困难,使得学生们不容易理解其数学基础.在2021—2022学年第二学期山东大学物理学院强基班、基地班及英才班的“数学物理方法”课程的教学中,我们对教学内容作了改革,尝试加入了希尔伯特空间相关知识的讲解,并收集了学生的反馈意见.在本文中,我们试做一总结,简单阐述本次教学改革的教学安排,展示收集到的反馈,并对其进行讨论和分析,为大家进一步教学改革提供参考.

## 1 教学内容

希尔伯特空间是欧几里得空间的推广,其不再局限于有限维的情况,将无限维也纳入考虑范围.希尔伯特空间是完备的内积空间.由于具有完备性,希尔伯特空间具有许多好的性质,任意波函数都可以在希尔伯特空间中用完备的本征函数系的线性组合来表示.希尔伯特空间是量子力学的表示空间,波函

\* 山东大学教育教学改革研究项目,项目编号:2021Y041.

作者简介:马艳姣(2001-),女,在读本科生,研究方向为高能物理.

通讯作者:尹笋(1976-),男,博士,副教授,研究方向为凝聚态物理.

数处于希尔伯特空间中,力学量算符相当于线性变换,作用于波函数之上.每一个描述微观粒子运动状态的态函数在某确定时刻都是希尔伯特空间中的一点,当态函数随着时间演化时,将在希尔伯特空间描绘出一条曲线<sup>[2]</sup>.因此,希尔伯特空间对于量子力学至关重要,为量子力学奠定了严谨的数学基础.

鉴于希尔伯特空间的重要性,我们尝试在数学物理方法的课程中加入希尔伯特空间的内容.本次教学改革实践面向2020级山东大学物理学院基地班、强基班及新工科英才班的学生.在2022年春季学期的数学物理方法课程中,当完成施图姆-刘维尔本征值内容的讲解之后,我们在第16周增加2个课时,介绍希尔伯特空间的相关内容.

施图姆-刘维尔本征值问题引出广义傅里叶级数,而广义傅里叶展开需要在希尔伯特空间进行.我们对于希尔伯特空间的介绍大概顺序如下:

首先介绍了矢量空间、内积空间及对偶空间的定义和性质,并简单介绍了完备性的概念,从而引出希尔伯特空间的定义——完备的内积空间<sup>[3]</sup>,向学生阐释了“希尔伯特空间是什么”.而后由希尔伯特空间的完备性,指出希尔伯特空间具有许多好的性质并简单介绍其中最为重要的几条.例如希尔伯特空间与其对偶空间同构等.至此,我们完成了最基本、最核心的部分——希尔伯特空间及其对偶空间的介绍.

第二部分内容包括希尔伯特空间的正交归一基,线性独立的定义,以及正交归一序列及完备序列等概念.而后,我们进入第三部分内容——希尔伯特空间上的线性算符.由易到难,由浅入深依次介绍了算符,线性算符,对偶算符,伴随算符以及厄米算符等概念.另外,我们简单介绍了Dirac的左右矢记号,但并未展开做过多讲解和证明,该部分内容会在量子力学中具体学习.

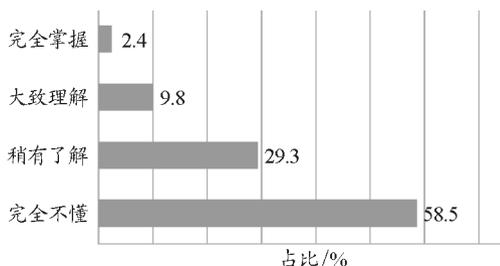
最后,我们简单介绍了无界算符及其自伴性.该部分内容属于延伸拔高内容,难度较大.在该部分中,首先给出有界算符和无界算符的定义,而后是稠定算符,自伴算符以及厄米算符的概念及其相互联系和区别.最后简单提及谱的概念,随之引出对自伴算符的谱分解定理.至此,关于希尔伯特空间以及相关概念的介绍结束.

## 2 反馈和讨论

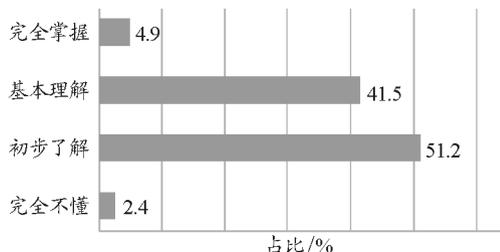
为了更好地反映本次课程的教学效果,进行更深入的教学研究,本次课后我们安排了线上调查问卷,用来收集学生的学习效果和反馈.为了在有限的几个问题中最大程度地获得有用的信息,我们以如下的思路设定相关问题:首先通过几个简明的问题来整体上反映本次课程对学生的帮助程度;其次,针对帮助程度较小的情况,结合后续的问卷问题分析其主要原因;而后,通过设置更为详细的问卷问题,将上述原因细化到具体授课内容.最后,结合学生的反馈建议,进一步归纳总结.

根据上述思路,我们在本次问卷中共设置了9个问题,前6道是单选题,后3道是多选题.最终回收到41份有效问卷,我们对回收到的数据进行了统计和分析.

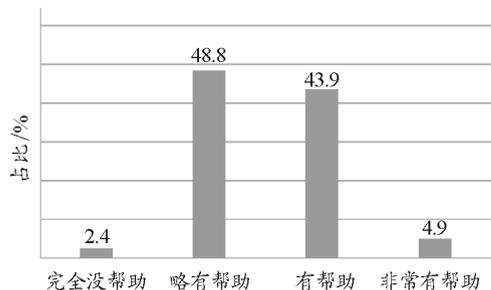
问卷前3题的目的在于探究参与本次教学改革的学生在此次课程中的受益程度,该目标可通过比较授课前后学生对希尔伯特空间的理解程度来体现,同时辅之以学生对该问题(即本次课程是否有帮助)的直观感受.二者相结合,即可反映本次课程对学生的帮助程度,另外,两者相比较也可以互相检验问卷结果的一致性和可靠性.此外,针对帮助较小的情况,我们增加第4题来探究其原因.前4个题的题目以及问卷结果表示在图1中.



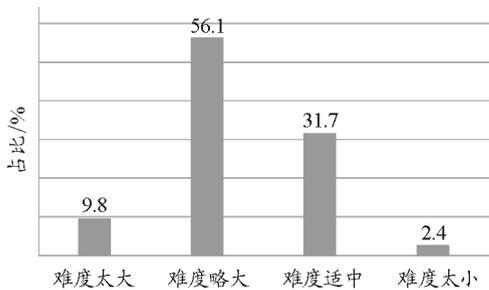
(a) 第1题“在本次授课前,您是否了解希尔伯特空间的概念”的调查结果



(b) 第2题“在本次授课后,您是否理解了希尔伯特空间的内容”的调查结果



(c) 第3题“本次课程对您是否有帮助”的结果



(d) 第4题“您认为此次授课内容的难度如何”的结果

图1 问卷1~4题的调查结果

对比授课前后学生对希尔伯特空间的理解程度,由图1中的(a)可知,在本次课程之前,有近 $\frac{2}{3}$ 的学生对希尔伯特空间是没有任何了解的,约 $\frac{1}{3}$ 的学生表示稍有了解,总体上学生对希尔伯特空间的了解程度是很低的.而图1(b)显示,在本次课程之后,51.2%学生对希尔伯特空间有了初步了解,41.5%的学生表示基本理解了相关内容.可见,经过本次课程的学习,90%以上的学生对希尔伯特空间有了不同程度的了解,绝大多数学生对希尔伯特空间的理解显著提高.

在第3题的回答中,48.8%的学生认为该堂课对自己略有帮助,43.9%的学生明确表示有帮助,4.9%的学生认为该课堂对自己非常有帮助,也就是说,97.6%的学生认为自己从这堂课中获得了不同程度的帮助.在第4题的回答中,56.1%的学生认为该堂课的内容难度略大,31.7%的学生认为难度适中.值得注意的是,约半数学生认为该堂课对自己仅是略有帮助,也就是说帮助不够大.为找到原因,我们对第3题和第4题进行了交叉分析,如表1所示.

表1 针对第3题和第4题的交叉分析

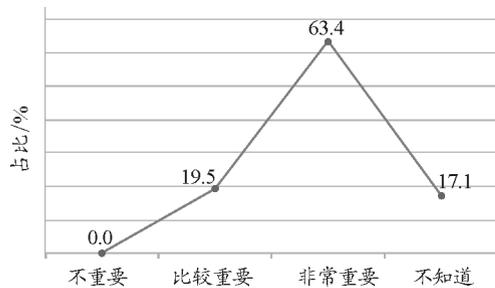
选项	难度太大	难度略大	难度适中	难度太小
完全没帮助	0(0%)	0(0%)	0(0%)	1(100%)
略有帮助	4(20%)	12(60%)	4(20%)	0(0%)
有帮助	0(0%)	11(61%)	7(39%)	0(0%)
非常有帮助	0(0%)	0(0%)	2(100%)	0(0%)

在表1中,我们可以看到选择略有帮助的学生中,有80%认为课程难度较大(包括难度太大和难度略大).因此,可以推测半数学生从该课程中所获得的帮助有限很可能是因为课程难度较大,对听课的专注度和数理思维提出了更高的要求,导致一些学生一时间不太适应,接收到的有效知识有限.可见,课程难度的问题值得进一步思考,在后续的问卷题目中我们将会进一步探讨.

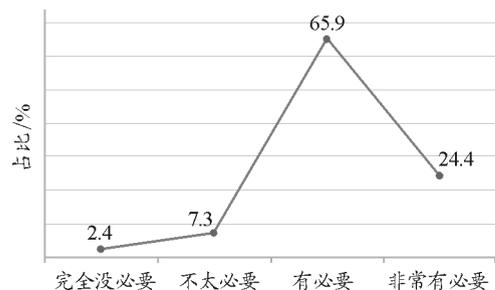
为了调查学生对希尔伯特空间重要性的认识,我们设置了第5题.此外,我们注意到,在山东大学物理学院的课程设置中,有学生反映由于量子力学教材(如曾谨言所著的《量子力学教程》第三版、陈鄂生所著的《量子力学基础教程》第七版等)中没有对希尔伯特空间相关内容的具体讲解<sup>[4-5]</sup>,在量子力学教学中一般默认希尔伯特空间的基础知识在数学物理方法中学过;由于缺乏直接的应用,数学物理方法的教材(如梁昆淼所著的《数学物理方法》第五版)中对希尔伯特空间的讲解较少.以往,任课教师通常认为在量子力学中才会学习这部分内容.我们了解到一些兄弟院校,也存在类似的情况.对于这一课程衔接中的空白现象,我们补充了第6题了解学生对此问题的看法,来辅助分析.第5,6题的题目与结果显示在图2中.

由图2,我们可以看到,图2(a)中63.4%的学生认为希尔伯特空间对量子力学非常重要,80%以上的学生都认可希尔伯特空间的重要性.从图2(b)的数据中可以看出,针对数学物理方法和量子力学课程中关于希尔伯特空间的衔接问题,90.3%的学生认为在数学物理方法的课程中补充希尔伯特空间的知识有必要或非常有必要,可见,绝大多数学生均

认可本次教学改革的必要性。



(a) 第5题“您认为希尔伯特空间对量子力学是否重要”的调查结果



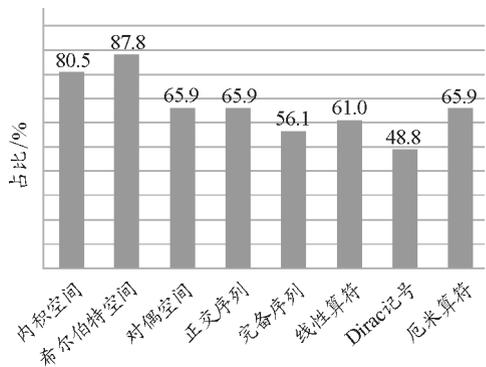
(b) 第6题“您认为在数学物理方法课程中补充希尔伯特空间的知识是否必要”的调查结果

图2 问卷5~6题的调查结果

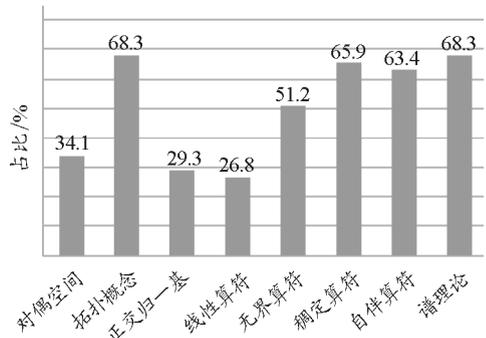
前文中我们曾提及部分学生认为课程难度较大,为了更精准地分析和解决问题,我们尝试将其细化到具体的授课内容和数学概念.在第7题中,我们罗列了本节课所讲到的一些重要概念,让学生选出自己掌握的部分.而在第8题中,我们挑选了一些学生可能认为难度较大的概念,作为多选的选项.虽然以上两题的选项同样是罗列本节课中涉及的数学概念,但在具体设置时,我们的侧重点有所不同,第7题侧重于调研学生掌握到的知识,因而我们选择了一些更为基础的概念,而第8题旨在调查学生认为不易理解的内容,因此,我们挑选了相对来说更为艰深的拔高性概念.最后,我们根据以上的问题和可能存在的其他不足,在第9题中提出了4个主要的改进建议以供选择.这3个题目内容以及调查结果显示在图3中.

在图3中,由图3(a)所示的数据可知,80%以上的学生理解了内积空间和希尔伯特空间等基本的空间概念,60%左右的学生学到了希尔伯特空间的对偶空间、希尔伯特空间中的正交序列和完备序列、希尔伯特空间上的线性算符、厄米算符等重要概念.

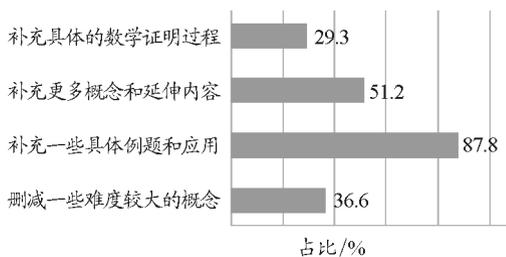
掌握程度最低的是 Dirac 的左右矢记号,但也达到48.8%的百分比.这是由于 Dirac 记号是量子力学课程中的内容,所以在本次授课过程中没有进行过过多的详细介绍.



(a) 第7题“通过本次课程的学习,您了解到了哪些希尔伯特空间的相关概念”的调查



(b) 第8题“在本次课程中,您认为以下哪些内容难度较大不易理解”的反馈情况



(c) 第9题“对于本次希尔伯特空间的讲解您有什么建议”的调查结果

图3 问卷7~9题的调查结果

对于图3(b)中难度较大的一些概念,50%~70%的学生认为无界算符及其自伴性的相关内容(无界算符、稠定算符、自伴算符、谱理论)以及拓扑概念不易理解.这是一个合理结果,无界算符及其自伴性本身就是本次课程中难度较大的延伸内容,而拓扑概念更是超出此次内容的要求.对于这些难度较大的概念,后期可以考虑适当地删减,并推荐合适

的参考书供有兴趣的学生进一步学习.

图3(c)收集了学生们关于课程的建议.可以看到近90%的学生建议补充一些具体的例题和概念的应用,从而使抽象的概念在应用中具象化,以便加深理解.相反,建议补充数学证明过程的人数是最少的.因此相对而言,大部分学生更关注知识的应用而非数学的证明.另外两个选项,“删减一些难度较大的概念”和“补充更多概念和延伸内容”的建议处于中等,人数相对比较接近.这个结果可能是由学生的数理基础差异和思维能力不同导致的:程度较好的学生希望了解更多的延伸内容,基础稍弱的学生则希望删减难度较大的概念.这种现象在其他课程中也是存在的.

### 3 结束语

基于我们对问卷结果的讨论和分析,可以肯定的是本次教学改革的效果整体上是成功的,课程内容的难度问题需要做进一步改进.结合学生们的建议和反馈,在教学内容上可以有两个改进方向:第一,删减一些难度较大不易理解的概念,将教学的重点放在希尔伯特空间相关的基础性概念上,对于难度较大的延伸性内容,可以推荐合适的书籍供有兴趣的学生进行深入学习.另一方面,由于数学概念相对比较抽象,可以对应地补充一些具体的例题和应

用,让学生在应用中体会抽象的概念,从而加深理解.

此外,通过观察课堂中学生的听课状态,我们发现新加内容的讲述需要精心安排讲述的时间.由于本次教学中心内容安排在第16周讲,正处于考试周之前.考试复习的压力使一些学生对接收新知识(尤其是非考试要求的知识)的兴趣显著降低,课上听讲的专注度下降,因此授课效果受到影响.我们后续计划适当调整关于希尔伯特空间的课时安排,比如在课程中期讲授傅里叶级数的时候便可以尝试引入广义傅里叶级数的概念,从而引入希尔伯特空间的一些相关概念,为后期特殊函数的广义傅里叶展开以及希尔伯特空间进一步的讲解做铺垫.通过循序渐进地渗透式讲解,或许可以达到更好的授课效果.

### 参考文献

- [1] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 193-199.
- [2] 王杰芳, 李玉晓, 贾瑜, 等. 经典相空间与希尔伯特空间对比浅析[J]. 物理与工程, 2014, 24(S2): 20-22.
- [3] 周彬, 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论中册[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2009: 196-200.
- [4] 曾谨言. 量子力学教程[M]. 3版. 北京: 科学出版社, 2014.
- [5] 李明明, 陈鄂生. 量子力学基础教程[M]. 7版. 济南: 山东大学出版社, 2021.

## Teaching Reform Practice on Hilbert Space in “Methods of Mathematical Physics”

MA Yanjiao YIN Sun

(School of Physics, Shandong University, Jinan, Shandong 250100)

**Abstract:** At present, most of the one-semester courses of “methods of mathematical physics” for physics students in China lack the contents of Hilbert space and related concepts. Nevertheless, this part is very important for the students’ subsequent courses and studies. In order to improve the teaching effect of the course, the authors carried out teaching reform on the course and added the contents of Hilbert space. In this paper, the teaching arrangement and content of this teaching reform is described and discussed, as well as the feedback collected from the students who took the course. By this paper we aim to give some constructive suggestions for other teachers and wish it helpful for further teaching reform of this course.

**Key words:** methods of mathematical physics; teaching reform; Hilbert space; quantum mechanics; students’ feedback and analysis