

由实验结论到牛顿第二定律的几种常见导出方法

张利国

(北京交通大学附属中学 北京 100081)

李璐

(中国船舶集团有限公司综合技术经济研究院 北京 100081)

(收稿日期:2022-11-18)

摘要:人教版教材中牛顿第二定律的导出过程过于粗略,学生容易产生疑问,在课堂上给学生充分的时间,无论学生应用何种方法推导,都可以有效避免类似疑问的多次产生.

关键词:牛顿第二定律;复合函数;导出方法

1 问题的提出

1.1 教材中的导出过程

人教版教材必修一第四章第2节的内容是“实验探究加速度与力、质量的关系”,利用实验数据分别绘制 $a-F$ 和 $a-\frac{1}{M}$ 图像,通过观察图像得出两条实验结论,分别为:在控制质量 M 不变时,加速度 a 与它所受的作用力 F 成正比;在控制作用力 F 不变时,加速度 a 与它的质量 M 成反比.在第3节开篇就将二者结合,表述为牛顿第二定律.推导过程的数学表达式如下:

质量 M 一定时, $a \propto F$

外力 F 一定时, $a \propto \frac{1}{M}$

推导出 $a \propto \frac{F}{M}$

也可以写成等式 $a = k \frac{F}{M}$ 或 $F = k'Ma$.

1.2 对于导出过程的困惑

由于教材呈现的导出过程过于粗略,学生又不太清楚复合函数的运算规则,所以很多学生会产生疑问:两式相乘,应得到结论 $a^2 \propto \frac{F}{M}$,而非 $a \propto \frac{F}{M}$?

学生展示的导出过程如下

$$a \propto F \Rightarrow a = k_1 F \quad (1)$$

$$a \propto \frac{1}{M} \Rightarrow a = k_2 \frac{1}{M} \quad (2)$$

其中 k_1, k_2 为常数.

式(1)、(2)相乘,有 $a^2 = k_1 k_2 \frac{F}{M}$.

1.3 学生导出过程的问题

学生认为 k_1, k_2 为常数,分别建立在保持质量 M 、力 F 不变的基础上,故将二者结合的过程中,应考虑到 k_1 是一个关于质量 M 的函数,而 k_2 是一个关于力 F 的函数, k_1, k_2 并非常数.

如果我们用反证法,很容易推翻学生得出的结论:

(1) 若结论为 $a^2 \propto \frac{F}{M}$,就会有:在 M 不变时, $a^2 \propto F$;在 F 不变时, $a^2 \propto \frac{1}{M}$,与前提不符.

(2) 唯有结论为 $a \propto \frac{F}{M}$,才能有:在 M 不变时, $a \propto F$;在 F 不变时, $a \propto \frac{1}{M}$,和前提相恰.

2 4种常见的导出方法

在用反证法推翻学生的结论后,学生们希望能展示至少一种正向推导的思维过程,所以笔者在本节课上,将时间和发言权交给学生,下面是学生比较容易想到的4种方法.

2.1 方法一

随机给出不同数值的质量 M 和力 F ,如表1所示,给 a_1 一个数值,对比第1行和第2行,发现可以控制质量 M 不变,根据加速度和力成正比可确定 a_2 ;将第1行和第3行对比,发现可以控制力 F 不变,根据加速度和质量成反比可确定 a_3 ;同理,我们可以任意取具有两行数据,只要它们具有相同的质量

或者相同的力,就可确定其他加速度 a_4, \dots

最后观察第 2 列的数据 a 与最后一列的数据

$\frac{F}{M}$, 归纳可得结论 $a \propto \frac{F}{M}$.

表 1 加速度 a 与 $\frac{F}{M}$ 的关系

序号	a	$M_1 = 1 \text{ kg}$	$M_2 = 2 \text{ kg}$	$F_1 = 6 \text{ N}$	$F_2 = 8 \text{ N}$	$\frac{F}{M}$
1	$a_1 = 6k$	1		6		6
2	$a_2 = 8k$	1			8	8
3	$a_3 = 3k$		2	6		3
4	$a_4 = 4k$		2		8	4
...

2.2 方法二

式(1)成立的前提为控制质量不变,若不加控制,还要式(1)成立,可以认为 k_1 是一个关于质量 M 的函数;同理,去掉式(2)的控制条件后,可认为 k_2 是一个关于力 F 的函数,分别将其写成 $k_1 = k_1(M)$ 、 $k_2 = k_2(F)$ 的形式,代回式(1)和(2),有

$$a = k_1 F \Rightarrow a = k_1(M) F \quad (3)$$

$$a = k_2 \frac{1}{M} \Rightarrow a = k_2(F) \frac{1}{M} \quad (4)$$

对于任意给定的一组数据 (M, F, a) , 应同时满足式(3)和式(4),故两式的 a 为同一数值,联立式(3)、(4),有

$$k_1(M) F = k_2(F) \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{k_1(M)}{\frac{1}{M}} = \frac{k_2(F)}{F}$$

令比值 $\frac{k_1(M)}{\frac{1}{M}} = k$, 怎么证明 k 是常数呢?

思路 1:

观察式(3),若控制 F 不变,有 $a \propto k_1(M)$, 结合 F 不变时,有 $a \propto \frac{1}{M}$, 得

$$k_1(M) \propto \frac{1}{M} \text{ 或 } \frac{k_1(M)}{\frac{1}{M}} \text{ 为一常数}$$

同理,观察式(4),若控制 M 不变,有 $a \propto k_2(F)$, 结合 M 不变时,有 $a \propto F$, 得

$$k_2(F) \propto F \text{ 或 } \frac{k_2(F)}{F} \text{ 为一常数}$$

思路 2:

假设 k 是关于 M 、 F 的函数,即

$$\frac{k_1(M)}{\frac{1}{M}} = \frac{k_2(F)}{F} = k(M, F)$$

在 $\frac{k_1(M)}{\frac{1}{M}} = k(M, F)$ 中, $\frac{k_1(M)}{\frac{1}{M}}$ 是一个和 F 无关

的函数,有 $\frac{\partial k(M, F)}{\partial F} = 0$.

在 $\frac{k_2(F)}{F} = k(M, F)$ 中, $\frac{k_2(F)}{F}$ 是一个和 M 无关

的函数,有 $\frac{\partial k(M, F)}{\partial M} = 0$.

即 $k(M, F)$ 为常数.

将比值 $\frac{k_1(M)}{\frac{1}{M}} = \frac{k_2(F)}{F} = k$ 代回式(3)或式(4),

均有 $a = k \frac{F}{M}$.

2.3 方法三

将式(3)和式(4)变形为

$$a = k_1(M) F \Rightarrow \frac{a}{F} = k_1(M) \quad (5)$$

$$a = k_2(F) \frac{1}{M} \Rightarrow M a = k_2(F) \quad (6)$$

联立式(5)、(6),消 a , 有 $\frac{k_2(F)}{F} = k_1(M) M$, 怎么证明该值是常数呢?

思路 1:

控制质量 M 不变,改变力 F , 有

$$\frac{k_2(F_1)}{F_1} = \frac{k_2(F_2)}{F_2}$$

若固定其中一组数据,可以写成

$$\frac{k_2(F)}{F} = \frac{k_2(1)}{1}$$

$$k_2(F) = k_2(1) F$$

将其代入式(6),有

$$Ma = k_2(1)F$$

取国际单位制,有 $k_2(1) = 1$,即 $F = Ma$.

思路 2:

控制力 F 不变,改变质量 M ,有

$$k_1(M_1) \cdot M_1 = k_1(M_2) \cdot M_2$$

若固定其中一组数据,可以写成

$$k_1(M) \cdot M = k_1(1) \cdot 1$$

代入式(5),有 $a = k_1(1) \frac{F}{M}$

取国际单位制,有 $k_1(1) = 1$,即 $a = \frac{F}{M}$.

2.4 方法四

假设有一组数据,其中包括给定数据 1(M_0, F_0, a_0)、中间过渡数据 2(M_0, F, a_1),以及变化后的任意数据 3(M, F, a),如图 1 所示.

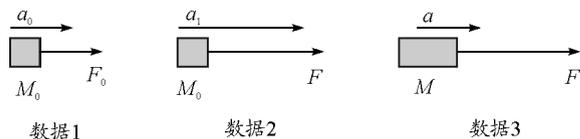


图 1 数据

选择数据 1 和数据 2,因为控制 M_0 不变,加速度和力成正比,总有

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{F}{F_0} \quad (7)$$

选择数据 2 和数据 3,因为控制 F 不变,加速度和质量成反比,总有

$$\frac{a}{a_1} = \frac{M_0}{M} \quad (8)$$

式(7)和式(8)相乘,有

$$\frac{a}{a_0} = \frac{M_0}{F_0} \frac{F}{M} \quad (9)$$

因为数据 1 是一组给定数据,为定值,令 $\frac{M_0 a_0}{F_0} = k$,其中 k 必定为某一常数,则式(9)可整理为

$$a = k \frac{F}{M}$$

3 导出过程的类比迁移

教材中用类似的方法导出的复合函数还有很多,如表 2 所示.

表 2 人教版教材中部分复合函数的导出

章节	必修二 第六章圆周运动 第 2 节向心力	必修二 第七章万有引力与宇宙航行 第 2 节万有引力定律	必修三 第九章静电场及其应用	必修三 第十一章电路及其应用 第 2 节导体的电阻	必修三 第十一章电路及其应用 第 2 节导体的电阻	必修三 第十三章电磁感应与电磁波初步 第 2 节磁感应强度磁通量	...
内容	探究向心力大小的表达式	万有引力定律的推导	库仑实验	部分电路欧姆定律	研究影响电阻的因素	探究影响通电导线受力的因素	...
导出过程	$\left. \begin{aligned} F &\propto m \\ F &\propto \omega^2 \\ F &\propto r \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	$\left. \begin{aligned} F &\propto \frac{M}{r^2} \\ F &\propto \frac{m}{r^2} \\ F &\propto \frac{Mm}{r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	$\left. \begin{aligned} F &\propto \frac{1}{r^2} \\ F &\propto Qq \\ F &\propto \frac{Qq}{r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	$\left. \begin{aligned} I &\propto U \\ I &\propto \frac{1}{R} \\ I &\propto \frac{U}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	$\left. \begin{aligned} R &\propto l \\ R &\propto \frac{1}{S} \\ R &\propto \frac{l}{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$	$\left. \begin{aligned} F &\propto I \\ F &\propto L \\ F &\propto \sin \theta \\ F &\propto \\ IL &\sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$...

如果学生在“牛顿第二定律”一节中没有明晰导出过程,在后面的学习中,就会再次产生问题.例如在导出万有引力定律的时候,有的学生得出错误的数学表达形式 $F \propto \frac{Mm}{r^4}$,错误地认为万有引力 F 与距离 r 的 4 次方成反比;也有的学生得出错误的数学表达形式 $F^2 \propto \frac{Mm}{r^2}$,错误地认为万有引力 F 的平方与质量乘积 Mm 成正比.

教师们不妨在此处多花一些时间,让学生充分

讨论牛顿第二定律的导出过程,只要能思考出一种推导方法,对比初中学过的欧姆定理的导出过程,学生会有恍然大悟之感,就可以避免在将来的学习过程中一再出现学习障碍.

参考文献

- [1] 尹彦彬,孙会娟,孙作江.关于实验结论 $\alpha = k \frac{F}{m}$ 的数学证明[J].物理教师,2002(11):35.
- [2] 吴海燕.关于牛顿第二定律导出过程的追问和思考[J].中学物理教学参考,2021,50(27):50-51.