



弹簧耦合摆在复杂情况下的小振动解

高金泽 王爱记

(北京师范大学物理学系 北京 100875)

(收稿日期:2022-11-25)

摘要:求解弹簧耦合摆的简正频率是理论力学中一道非常经典的题目,用分析力学的角度研究该题是一种重要的方法.目前对弹簧摆的研究多针对两单摆间的距离恰好等于弹簧原长;而当距离略大于或小于弹簧原长时,平衡状态下单摆摆线不再处于竖直状态,由于涉及不同的小角度近似,系统动能和势能的表示都变得更为复杂.本文探究了弹簧耦合摆系统的简正频率与系统静止时摆线偏移竖直方向角度的关系,利用 MATLAB 计算对比了是否使用小角度近似的运动过程,得到了近似解的适用情况.最后,在不考虑小角度的情况下,计算了拍频与弹簧固有频率、单摆固有频率和单摆平衡状态下偏移角度的关系.

关键词:弹簧耦合摆;简正频率;拍;MATLAB

自然界中相互作用的振动系统非常普遍,如电学中电容和电感耦合的振荡回路^[1]、固体晶格中相邻原子的振动模式^[2]以及光子和声子耦合产生的电磁耦合场^[3]等.相互作用将使振动系统呈现丰富的运动学行为,因此对其研究十分必要.在力学中,弹簧耦合摆也属于此类系统.由两个单摆悬挂于同一水平线上,两摆球以弹簧连接,实现振动的相互耦合.

目前关于弹簧摆的研究文章中,大多针对两摆悬挂点间距离恰好等于弹簧原长的情况进行研究^[4-6],具有一定局限性.当两单摆悬挂点间的距离略大于或小于弹簧原长时,平衡状态下单摆在竖直方向的角度偏移使动能和势能的表达式更为复杂,呈现的拍现象也受更多因素的影响.本文从两摆间距离略大于弹簧原长的情况入手,在小角度近似的情况下从分析力学的角度进行求解.笔者利用 MATLAB 计算了非小角度近似下的数值解,对其运动产生的拍进行探究,与两摆间距离等于弹簧原长的情况对比.对于两摆间距离略小于弹簧原长也可以用类似的求解方法.

1 模型构建

图1为弹簧摆在静止状态下的示意图.轻质弹

簧劲度系数均匀为 κ ,轻质摆线长 l ,小球A,B均视为质点,质量均为 m ,初始偏角均为 θ_0 ,两摆悬挂点间距离为 L ,弹簧自然长度 L_0 , L_0 略小于 L ,所需物理量均在图中标出.

假设不考虑外界空气阻力等耗散影响,弹簧与小球在竖直平面内运动.两摆的角度取逆时针为正方向,处于平衡状态时,设弹簧压缩量为 Δx_0 ,小球A的平衡角度为 $+\theta_0$,小球B的平衡角度为 $-\theta_0$.

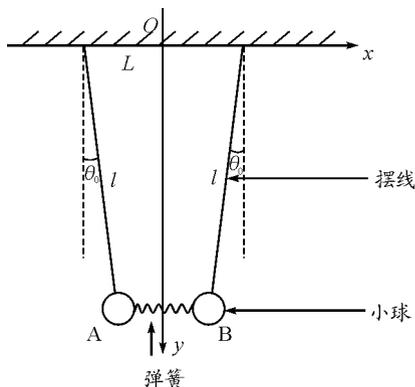


图1 静止状态下系统示意图

由虚功原理得

$$mg\delta y + \kappa\Delta x_0\delta x = 0 \quad (1)$$

又有

$$\begin{aligned} \delta y &= l\delta \cos \theta_0 \\ \Delta x_0 &= L - 2l\sin \theta_0 - L_0 \end{aligned}$$

作者简介:高金泽(2002-),女,在读本科生.

通讯作者:王爱记(1990-),男,实验师,研究方向为大学物理实验教学研究.

$$\delta x = l\delta \sin \theta_0 \quad (2)$$

联立式(1)、(2), 设 $l_0 = L - L_0$, 则有

$$mg \tan \theta_0 = \kappa(l_0 - 2l \sin \theta_0) = \kappa \Delta x_0 \quad (3)$$

如图2所示设摆线偏离平衡位置的角度为 θ_1, θ_2 .

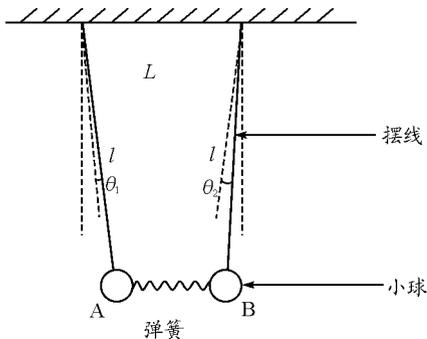


图2 运动过程中系统示意图(图中两小球偏离垂直方向角度分别为 $\theta_1 + \theta_0, \theta_2 - \theta_0$)

则小球A的位置坐标为

$$x_1 = l \sin(\theta_0 + \theta_1) - \frac{L}{2}$$

$$y_1 = -l \cos(\theta_0 + \theta_1)$$

B的位置坐标为

$$x_2 = l \sin(\theta_2 - \theta_0) + \frac{L}{2} \quad y_2 = -l \cos(\theta_2 - \theta_0)$$

设悬挂点所在的水平线为重力势能零点, 系统平衡状态下的弹簧弹性势能为弹性势能零点, 则系统的动能 T 、重力势能 V_g 和弹性势能 V_k 满足

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (4)$$

$$V_g = mg(y_1 + y_2) \quad (5)$$

$$V_k = \frac{1}{2} \kappa (\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - L_0)^2 \quad (6)$$

考虑小角度振动, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为小量可作近似处理

$$V_k = \frac{1}{2} \kappa [(\Delta x - L_0)^2 + \Delta y^2] \quad (7)$$

$\Delta x, \Delta y$ 可表示为

$$\begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 \end{cases} \quad (8^*)$$

即

$$\begin{cases} \Delta x = l \sin \theta_0 \left(\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} - 2 \right) + l \cos \theta_0 (\theta_2 - \theta_1) + L \\ \Delta y = l \cos \theta_0 \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2} - l \sin \theta_0 (\theta_2 + \theta_1) \end{cases} \quad (8)$$

对式(5)小量展开可得

$$V_g = mgl \left[\cos \theta_0 \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} + \sin \theta_0 (\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (9)$$

式(3)、(8)代入式(7)可得

$$V_k = \kappa \Delta x_0 l \left[\sin \theta_0 \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} + \cos \theta_0 (\theta_2 - \theta_1) \right] + \frac{1}{2} \kappa l^2 [\cos^2 \theta_0 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_0 (\theta_2 + \theta_1)^2] \quad (10)$$

联立式(9)、(10), 令 $V = V_g + V_k$, 则可得

$$V = A(\theta_1^2 + \theta_2^2) + C\theta_1\theta_2 \quad (11)$$

其中

$$A = \frac{mgl}{2 \cos \theta_0} + \frac{1}{2} \kappa l^2$$

$$C = \kappa l^2 (\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) \quad (12)$$

由于考虑 $\theta_0 < \frac{\pi}{4}$, 故 $C < 0$. 则拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) -$$

$$A(\theta_1^2 + \theta_2^2) - C\theta_1\theta_2 \quad (13)$$

2 简正分析

2.1 求解简正频率

拉格朗日量 L 中含有关于坐标 θ_1, θ_2 的耦合项, 在求解问题时, 往往通过构造矩阵 \mathbf{V} 和 \mathbf{T} 求解简正频率进而求解简正坐标.

由式(4)、(11), 列出势能、动能对应的矩阵^[7]

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2A & C \\ C & 2A \end{pmatrix} \\ \mathbf{T} = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (14)$$

并记 $\mathbf{P} = \mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}$, 令 $\det(\mathbf{P}) = 0$, 得

$$\begin{vmatrix} 2A - \omega^2 ml^2 & C \\ C & 2A - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0$$

解得系统的简正频率

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2A+C}{ml^2}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2A-C}{ml^2}} \quad (15)$$

由于

$$2A + C = \frac{mgl}{\cos \theta_0} + 2kl^2 \sin^2 \theta_0 > 0$$

又 $C < 0$, 故 ω_1, ω_2 均为实数, 且 $\omega_1 < \omega_2$.

2.2 构造简正坐标

代入简正频率 ω 后, 矩阵 \mathbf{P} 的本征矢量即为原广义坐标线性组合的系数, 如此可得到各简正频率 ω 对应的简正坐标.

当 $\omega = \omega_1$ 时,代入矩阵 \mathbf{P} 得

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -C & C \\ C & -C \end{pmatrix}$$

其特征向量 $\mathbf{n}_1 = (1, 1)$.

当 $\omega = \omega_2$ 时,代入矩阵 \mathbf{P} 得

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} C & C \\ C & C \end{pmatrix}$$

其特征向量 $\mathbf{n}_2 = (1, -1)$.

所以对应 ω_1 的简正坐标为 $\xi_1 = \theta_1 + \theta_2$, 对应 ω_2

的简正坐标为 $\xi_2 = \theta_1 - \theta_2$.

将 ξ_1, ξ_2 代入拉格朗日量得

$$L = \frac{1}{4} [ml^2 \dot{\xi}_1^2 - (2A + C)\xi_1^2] + \frac{1}{4} [ml^2 \dot{\xi}_2^2 - (2A - C)\xi_2^2] \quad (16)$$

得到拉格朗日运动方程

$$\frac{1}{2} ml^2 \ddot{\xi}_1 + A\xi_1 + \frac{C}{2}\xi_1 = 0 \quad (17-1)$$

$$\frac{1}{2} ml^2 \ddot{\xi}_2 + A\xi_2 - \frac{C}{2}\xi_2 = 0 \quad (17-2)$$

可以通过求解式(17-1)、(17-2),验证其对应的简正频率正是式(15)中的 ω_1, ω_2 .

通过坐标变换得到的 ξ_1, ξ_2 的物理意义十分明显: $\xi_1 = \theta_1 + \theta_2$ 表示两小球组成的系统质心的运动, $\xi_2 = \theta_1 - \theta_2$ 表示两小球的相对运动^[8]. 系统的运动

可视上述两种运动状态的叠加,由上述分析可得,

在初始偏移角度 $\theta_0 < \frac{\pi}{4}$ 情况下,系统质心运动频率小于相对运动频率.

2.3 近似解与非近似解的对比

非近似解对动能 T 、势能 V 中的小量 θ_1, θ_2 不做近似处理.

根据

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$V_g = mg(y_1 + y_2)$$

$$V_k = \frac{1}{2} \kappa (\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - L_0)^2$$

得到拉格朗日量

$$L = T - (V_g + V_k)$$

通过 MATLAB 中的 ode45 解拉格朗日运动方程得到数值解.

非小角度情况下, θ_1 和 θ_2 的近似解与非近似解如图 3 和图 4 所示,可以看出在静止时偏移角度 θ_0 以及 θ_1, θ_2 的初始角度不在小角度范围内时 ($\theta_1 \neq \theta_2$), 弹簧耦合摆形成拍,但近似解与非近似解描述的拍频不同,此时用小角度近似不再合理. 在 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ 时, $\omega_1 = \omega_2$, 拍的现象消失,两摆做相同周期简谐振动.

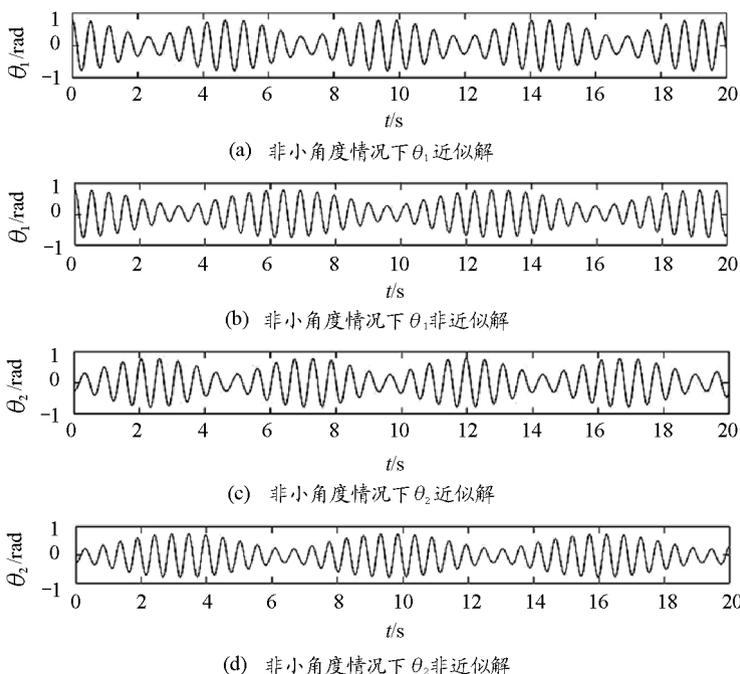


图 3 取 $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}; \theta_2(0) = -\frac{\pi}{12}; \theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时 θ_1, θ_2 的近似解与非近似解

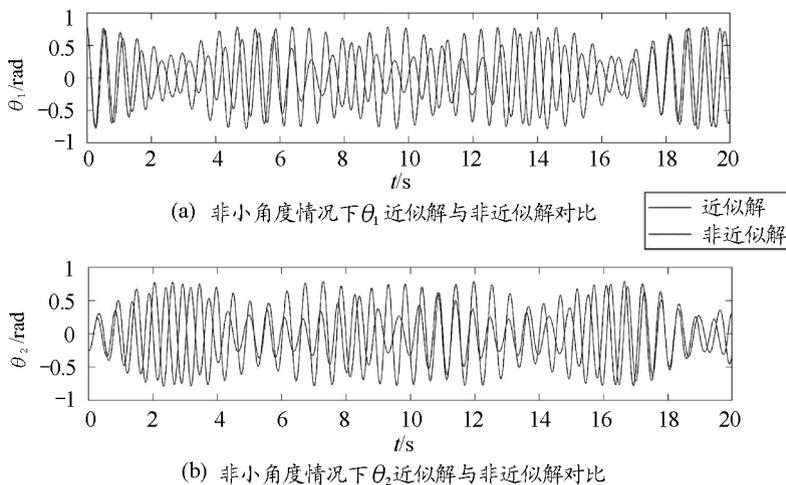


图4 取 $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}; \theta_2(0) = -\frac{\pi}{12}; \theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时,非小角度情况下近似解与非近似解对比

3 与摆悬挂点间距等于弹簧原长情况的对比

当两单摆悬挂点间距等于弹簧原长时,弹簧耦合摆的运动依旧形成拍.摆悬挂点间距等于弹簧原长时,简正频率^[6]为

$$\omega_1^0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \omega_2^0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\kappa}{m}} \quad (18)$$

由式(21),可以得到拍频 ω^0

$$\omega^0 = \omega_2^0 - \omega_1^0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\kappa}{m}} - \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (19)$$

当 $2\kappa l \ll mg$ 时,对 ω^0 进行小量展开得到

$$\omega^0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\sqrt{1 + \frac{2\kappa l}{mg}} - 1 \right) = \frac{\kappa}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{\omega_s^2}{\omega_p} \quad (20)$$

故拍频 ω^0 正比于弹簧的固有频率 ω_s 的二次方,反比于单摆固有频率 ω_p .改变 ω_s ,测量运动拍频 ω^0 ,拟合 $\omega^0 - \omega_s^2$ 图像,根据其斜率 $\frac{1}{\omega_p}$,可得到单摆固有频率 ω_p .用 MATLAB 在 $2\kappa l \ll mg$ 和小角度近似的条件下进行模拟计算^[9],得到如图 5 所示的结果.

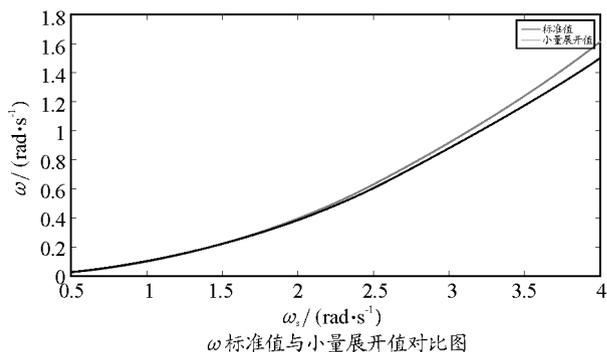


图5 取 $\omega_p = 10 \text{ rad/s}$ 时, ω^0 小量展开的近似解与标准解对比

当 ω_s 逐渐增大, $2\kappa l \ll mg$ 的条件不再满足,小量展开的近似解与标准解曲线出现偏差.

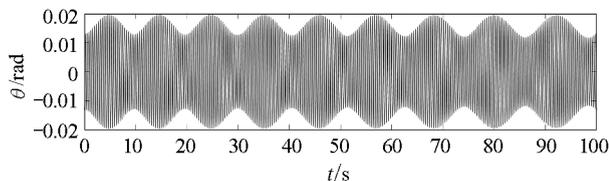
摆悬挂点间距大于弹簧原长时,由式(18)得拍频 $\omega_>$ 为

$$\omega_> = \left| \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\cos \theta_0} + 2\omega_s^2 \sin^2 \theta_0} - \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\cos \theta_0} + 2\omega_s^2 \cos^2 \theta_0} \right| \quad (21)$$

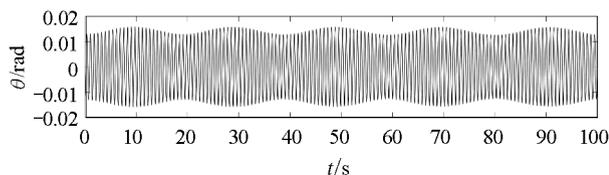
当 $2\kappa l \ll mg$ 时,对 $\omega_>$ 进行小量展开

$$\omega_> = \left| \frac{\omega_s^2}{\omega_p} \sqrt{\cos \theta_0} \cos 2\theta_0 \right| \quad (22)$$

故拍频 ω 除正比于弹簧的固有频率 ω_s 的二次方,反比于单摆固有频率 ω_p 外,还与平衡状态时的偏移角度 θ_0 有关.



(a) 平衡位置无偏移非近似解



(b) 平衡位置偏移非近似解

图6 $2\kappa l \ll mg$ 情况下拍频对比图

图6验证了上述结论,即在其他条件相同情况下,两单摆悬挂点间距等于弹簧原长的情况下,拍频恒大于悬挂点距离大于弹簧原长的情况.

4 总结

本文探究了两单摆悬挂点间距大于弹簧原长情况下的复杂弹簧耦合摆的小振动解. 借助分析力学的方法, 在小角度近似条件下, 列出拉格朗日方程和动能、势能对应的矩阵, 求解了系统运动状态. 随着 θ_0 的增加, ω_1 单调递增, ω_2 在 $\theta_0 = \theta'_0$ 满足式(19)时取得最小值, 且在极值两侧 ω_2 随 θ_0 的变化是近似对称且平滑的.

在非小角度情况下, 将近似解和非近似解的运动图像进行对比, 发现近似解的拍频稍大于非近似解, 近似计算不再合理.

在 $2\kappa l \ll mg$ 的条件下, 耦合摆运动的拍频满足式(25), 即拍频正比于弹簧的固有频率 ω_s 的二次方, 反比于单摆固有频率 ω_p , 且与平衡状态时偏移角度 θ_0 有关. 两单摆悬挂点间距等于弹簧原长系统的拍频恒大于悬挂点距离大于弹簧原长的系统.

参考文献

- [1] 张玉强, 蔡绍洪. 介观电容和电感耦合电路中的库仑阻塞效应[J]. 科技导报, 2011, 29(20): 31-34.
- [2] 段宝兴, 杨银堂. 利用 Keating 模型计算 $\text{Si}_{(1-x)}\text{Ge}_x$ 及非晶硅的拉曼频移[J]. 物理学报, 2009, 58(10): 7 114 - 7 118.
- [3] 周志成. 二维声光子晶体的传感特性的研究[D]. 南昌: 南昌大学, 2018.
- [4] 路峻岭, 汪荣宝. 对耦合摆实验中耦合弹簧的改进[J]. 物理实验, 2005, 25(8): 36-37.
- [5] 隗功民. 弹簧质量对耦合摆小振动角频率的影响[J]. 大学物理, 1997, 16(7): 19-20.
- [6] 余守宪. 弹簧耦合摆小振动的简正模与简正频率[J]. 大学物理, 1998, 17(8): 15-15.
- [7] 梁昆森. 力学(下册)[J]. 北京: 人民教育出版社, 1978: 8.
- [8] HERBERT Goldstein. Classical mechanics[M]. United States of America: Addison-Wesley, 2002.
- [9] 彭芳麟. 计算物理基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

Small Vibration Solutions in Complex Situations of Spring Coupled Pendulum

GAO Jinze WANG Aiji

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

Abstract: Solving the normal frequency of spring coupled pendulum is a very classical problem in theoretical mechanics. It is a valuable method to study this problem from the perspective of analytical mechanics. At present, the study on the spring pendulum mainly focuses on the circumstance where the distance between two simple pendulum is exactly equal to the original spring length; however, when the distance becomes slightly larger or smaller than the original spring length, the representation of the system's kinetic energy and potential energy will be more complicated with the different small-angle approximations involved. In this paper, a general method of constructing normal coordinates is introduced. Starting from normal frequency, the relationship between a normal frequency of the system and the offset angle of the system at rest is explored by controlling the initial release angles of the two pendulum balls to be negative to each other. The motion process is simulated by MATLAB and compared. After that, the application of the small angle approximate solution is obtained and the relationship between the beat frequency and the natural frequency of spring, the natural frequency of pendulum and the offset angle of a pendulum at equilibrium is verified.

Key words: spring coupled pendulum; normal frequency; beat; MATLAB