

析元运动求解无限次碰撞问题*

——湖南省 2022 年学业水平选择性考试物理卷
第 14 题第(3)问的探析

马林园 曾长兴

(深圳市龙岗区华中师范大学龙岗附属中学 广东 深圳 518172)

(收稿日期:2022-11-26)

摘要:湖南省 2022 年学业水平选择性考试物理卷第 14 题以“篮球运动”为背景,对常规模型赋予新的物理情境,实现高考选拔功能.然而,在解题时,学生对第(3)问普遍感觉难度较大,无从下手.建立情境分析与转化的实施路径,探讨无限次碰撞问题的有效策略:情境分析,模型建构;析元运动,推理论证;探究规律,数学处理;搭架简化,解释检验.同时,作为教学思考,对高三复习备考提出建议.

关键词:无限次碰撞;湖南试题;析元运动;教学启示

湖南省 2022 年普通高中学业水平选择性考试物理卷第 14 题,是一道以篮球运动为背景的无限次碰撞问题,属于生产实践情境类的原始问题.在解题时,学生往往困难重重,特别是对第(3)小问,学生普遍感觉难度较大,部分教师对此也很难正确判断.本文以该题为例,对无限次碰撞问题做深入分析,探讨出有用的解题思路和方法,以期对高三备考有所帮助.

1 原题呈现

【原题】如图 1(a)所示,质量为 m 的篮球从离地 H 高度处由静止下落,与地面发生一次非弹性碰撞后反弹至离地 h 的最高处.设篮球在运动过程中所受空气阻力的大小是篮球所受重力的 λ 倍, λ 为常数,且 $0 < \lambda < \frac{H-h}{H+h}$,且篮球每次与地面碰撞的碰后速率与碰前速率之比相同,重力加速度大小为 g .

(1) 求篮球与地面碰撞的碰后速率与碰前速率之比;

(2) 若篮球反弹至最高处 h 时,运动员对篮球施加一个向下的压力 F ,使得篮球与地面碰撞一次后

恰好反弹至 h 的高度处,力 F 随高度 y 的变化如图 1(b) 所示,其中 h_0 已知,求 F_0 的大小;

(3) 篮球从 H 高度处由静止下落后,每次反弹至最高点时,运动员拍击一次篮球(拍击时间极短),瞬间给其一个竖直向下、大小相等的冲量 I ,经过 n 次拍击后篮球恰好反弹至 H 高度处,求冲量 I 的大小.

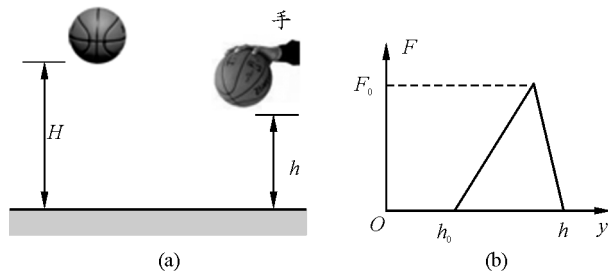


图 1 原题题图

2 对前两问的分析与解答

(1) 设篮球与地面碰撞的碰后速率为 v_2 ,碰前速率为 v_1 ,则由题意得

$$k = \frac{v_2}{v_1}$$

* 广东省教育科学“十三五”规划课题“‘非常规’物理实验教学模式的创新与实践”,课题编号:2019YQJK249;广东省中小学教师培训中心专项科研课题“基于深度学习的高中物理思维情境教学研究”的研究成果,立项编号:GDSP-2021-E002.

作者简介:马林园(1989-),男,硕士,中学一级教师,主要从事高中物理教学及研究.

通讯作者:曾长兴(1973-),男,硕士,中学特级教师,正高级教师,硕士生导师,主要从事高中物理教学及研究.

篮球在下落过程中,根据动能定理得

$$mgH - \lambda mgH = \frac{1}{2}mv_1^2$$

篮球反弹至最高点,根据动能定理得

$$-mgh - \lambda mgh = 0 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

联立解得

$$k = \sqrt{\frac{(1+\lambda)h}{(1-\lambda)H}}$$

(2) 篮球反弹至最高点时,运动员对篮球施加一个向下的力,根据动能定理得

$$mgh + \frac{F_0}{2}(h - h_0) - \lambda mgh = \frac{1}{2}mv_3^2$$

根据第(1)问的描述可知,篮球落地反弹的速率为

$$v_1 = kv_3$$

篮球反弹至最高点,根据动能定理得

$$-mgh - \lambda mgh = 0 - \frac{1}{2}mv_4^2$$

联立解得

$$F_0 = \frac{2mg(1-\lambda)(H-h)}{h-h_0}$$

3 关于第(3)问的基本思路分析

3.1 试题情境分析与转化实施路径

在物理教学中,应让学生获得在实际情境中解决物理问题的大量经验,形成把情境与知识相关联的意识和能力^[1].在实际的问题解决中,把问题中的实际情境转化成解决问题的物理情境,建立相应的物理模型,是解决问题的关键.由此,我们建立了基于问题解决的试题情境分析与转化实施路径,如图

2所示.

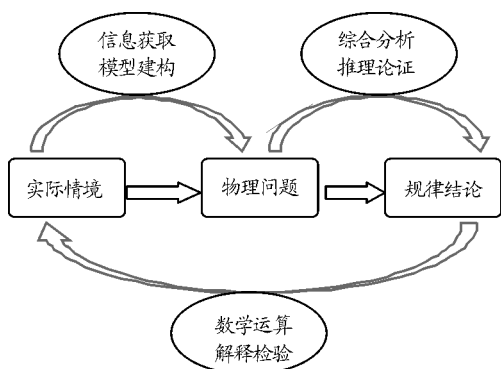


图2 试题情境分析与转化实施路径

该实施路径要求学生能够从复杂的实际情境问题中提取关键物理信息,将研究对象和过程转化成物理模型,实现情境问题转化成物理问题;然后运用科学思维对物理过程综合分析,利用物理概念和规律对物理问题推理论证,获得正确规律和结论;最后运用数学工具解决实际问题,利用运算结果解释问题情境,通过判断是否符合物理意义,检查结果是否科学.

3.2 无限次碰撞问题解题思路框架

碰撞问题是学习的重点和难点,也是历年高考常考考点.本题以拍篮球真实情境为背景,考查力与运动、功和能量、动量等物理核心知识.篮球竖直下落,在与地面发生非弹性碰撞前做匀加速运动,碰撞后做匀减速直线运动.虽然碰撞前后的速度不连续,但每次碰撞均满足相同规律,我们称之为无限次碰撞问题.基于问题解决的试题情境分析与转化实施路径,我们提出了无限次碰撞问题解题思路框架,如图3所示.

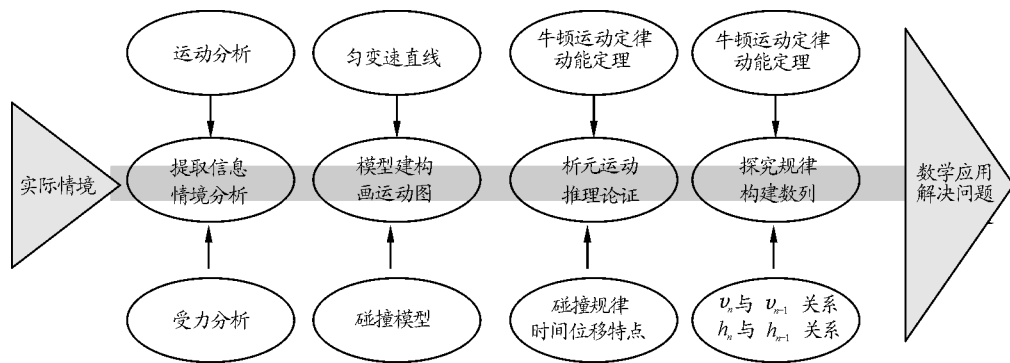


图3 无限次碰撞问题解题思路框架

该框架以情境分析、模型建构、推理论证、探究规律、数学应用为主要阶段进行该题的问题解决.其

中,模型建构是解决该题的核心,而探究规律是解决该题的关键.析元运动,就是在重复运动过程中,选

取一段运动为元运动,根据碰撞规律得出第 n 次碰撞后的速率与第 $n-1$ 次碰撞后的速率关系(或者位移关系等),构建等差或等比数列,从而实现问题的解决.

4 关于第(3)问的进一步探析

按照物体间无限次碰撞问题解题思路框架,利用析元运动的解题思路,我们将第(3)问的分析过程分成4个步骤,即:情境分析,模型建构;析元运动,推理论证;探究规律,数学处理;搭架简化,解释检验.

4.1 情境分析 模型建构

篮球从高处下落做匀加速直线运动,与地面发生非弹性碰撞(速率前后比一定),反弹后向上做匀减速运动,运动员在最高点瞬间给篮球一个冲量,使篮球获得一定初速度.此后,篮球重复前次相同的运动规律,直至原来的高度.每一个阶段,篮球都经历四个过程:最高点获得相同速度、匀加速下落、碰撞及匀减速上升,运动过程如图4所示.

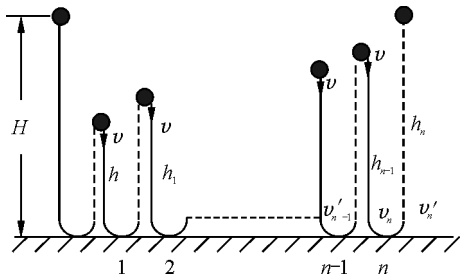


图4 篮球运动过程示意图

4.2 析元运动 推理论证

由于篮球每次都重复相同的运动规律,我们可以取第 $n-1$ 次碰撞后到第 n 次碰撞前为一个元运动,分析篮球在这个阶段的运动规律.设每次拍球时,篮球获得速度为 v ,第 n 次拍球后,篮球与地面相碰前速率为 v_n ,反弹后速率为 v'_n ,碰撞后与碰前速率之比为 k ,篮球与地面碰撞反弹后上升到最高点距离为 h_n ,则

篮球第 $n-1$ 次与地面碰撞反弹至最高点,根据动能定理得

$$-(1+\lambda)mgh_{n-1} = 0 - \frac{1}{2}mv_{n-1}'^2 \quad (1)$$

因为拍打的时间极短,重力的冲量可忽略不计,则根据动量定理可知

$$I = mv \quad (2)$$

拍打第 n 次下降过程中,根据动能定理得

$$(1-\lambda)mgh_{n-1} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv'^2 \quad (3)$$

篮球与地面第 n 次碰撞前后速率关系为

$$v'_n = kv_n \quad (4)$$

由第(1)问可知

$$k = \sqrt{\frac{(1+\lambda)h}{(1-\lambda)H}}$$

联立式(1)~(4),解得

$$v_n'^2 = \frac{h}{H}v_{n-1}'^2 + \frac{I^2(1+\lambda)h}{m^2(1-\lambda)H} \quad (5)$$

4.3 探究规律 数学处理

通过析元运动,得到了篮球与地面第 n 次碰撞后速率 v'_n 与第 $n-1$ 次碰撞后速率 v'_{n-1} 之间的关系,可以进一步探究第 n 次碰撞后上升高度 h_n 与第 $n-1$ 次碰撞后上升高度 h_{n-1} 之间的规律,分析过程如下.

篮球第 n 次与地面碰撞反弹至最高点,根据动能定理得

$$-(1+\lambda)mgh_n = 0 - \frac{1}{2}mv_n'^2 \quad (6)$$

联立式(1)、(5)、(6),解得

$$h_n = \frac{h}{H}h_{n-1} + \frac{I^2h}{2m^2g(1-\lambda)H} \quad (7)$$

由式(7)构造等比数列,可得

$$h_n - \frac{I^2h}{2m^2g(1-\lambda)(H-h)} =$$

$$\frac{h}{H} \left[h_{n-1} - \frac{I^2h}{2m^2g(1-\lambda)(H-h)} \right] \quad (8)$$

其中 $n=1$ 时, $h_0 = h$,故等比数列首项为

$$h_1 - \frac{I^2h}{2m^2g(1-\lambda)(H-h)} =$$

$$\frac{h^2}{H} \left[1 - \frac{I^2}{2m^2g(1-\lambda)(H-h)} \right]$$

其通项表达式为

$$h_n - \frac{I^2h}{2m^2g(1-\lambda)(H-h)} =$$

$$\frac{h}{H} \left[1 - \frac{I^2}{2m^2g(1-\lambda)(H-h)} \right] \left(\frac{h}{H} \right)^{n-1}$$

由题意知, n 次拍击后篮球恰好反弹至 H 高度处,即 $h_n = H$,解得

$$I = \sqrt{\frac{H - h \left(\frac{h}{H}\right)^n}{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^n} \frac{2m^2 g(1 - \lambda)(H - h)}{h}}$$

4.4 搭架简化 解释检验

通过数学深入研究物理本质,才能揭示出数学和物理学之间强烈的概念关系^[2].鉴于此,我们有必要对运算结果进行整理与分析,让学生深入挖掘无限次碰撞问题的物理本质,以此提升习题教学的效果.题目3问都求解完成了,我们可以追问一个问题:如果在最高点时不给篮球冲量,那么篮球由静止下落到最终停止时经过的总路程是多少?下面来分析一下.

根据题设条件,不给篮球冲量,则 $I = 0$,由式(7)得

$$h_n = \frac{h}{H} h_{n-1} \quad (9)$$

篮球运动总路程等于 H 加上与地面每次碰撞反弹后上升高度之和的2倍,即

$$s = H + 2(h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_n) = \frac{H(H+h)}{H-h}$$

在上述问题求解的过程中,我们发现篮球与地面无限次碰撞的物理本质,即

$$h_n = \frac{h}{H} h_{n-1}$$

所以在最高点时不给篮球冲量,前面的分析依然有效.不过,当在最高点时给篮球瞬间冲量时,即有

$$h_n + b = \frac{h}{H} (h_{n-1} + b) \quad (10)$$

式中 b 为常量.

将式(10)化简,可以得到

$$b = -\frac{I^2 h}{2m^2 g(1 - \lambda)(H - h)}$$

这正是式(8)所要得到的物理规律,体现了一般性无限次碰撞的物理本质.

5 总结及启示

通过逐步求解完这道题目,回过头来想想我们在分析第(3)问时存在困难,主要表现为以下两点:一是学生存在心理恐惧感,觉得压轴题前面两问都这么复杂,那么第三问就更没戏了;二是在面对问题

情境时,试图一次性想明白篮球的运动状态,但大都是经验性判断,最终无法得到正确结论.作为物理学科的压轴题,其实该题第(3)问计算量并不大,重在考查学生思考问题的能力.对于困难一,我们建立情境分析与转化的实施路径,对实际问题情境进行抽象、概括提取关键信息、建构物理模型.对于困难二,我们提出析元运动解题思路,把元运动的状态和经历的过程及其物理规律数学化,挖掘问题情境的物理本质.基于以上认识,结合近几年高考试题特点,我们对高三复习提出以下几点教学建议与启示.

首先,创设变式情境,引导思维教学.高考物理试题注重把常规模型赋予新的物理情境,融合多个知识点,考查学生的知识迁移能力,检验学生分析物理模型的能力.这启示我们,在日常教学中,教师要把基本物理模型融入到新情境中,不断进行情境变式,搭建思考的脚手架,引导学生在新情境中建构模型,应用老模型解决新问题.

其次,夯实必备知识,提升关键能力.新高考的命题已由知识立意转向能力和素养立意,关注点是必备知识和关键能力.在这种情况下,有效培养学生的能力、发展学生的核心素养才是教学的最终目标.在高三复习中,教师要强调对核心概念理解,掌握物理规律的形成过程,善于对规律与方法的应用进行拓展与延伸,以提高解决综合问题的关键能力和核心素养.

最后,规范科学表述,提升数学素养.物理学科的一个突出的特点是“数学是物理学习的语言和工具”,不会利用数学工具是无法解决复杂的物理问题的.在高中物理教学中,教师需培养学生运用物理规律把各物理间的关系列出,利用函数、方程等数学知识求解,把物理问题转化为数学问题,要把数学的思维方法迁移到物理的学习中,不断训练和强化学生的数学与物理思维有机融合能力^[3].

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中物理课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020:53.
- [2] 谭小凤,钱长炎,李林静.2021年高考全国乙卷理综物理试题第24题解析及启示[J].物理教学,2022,44(2):72-75.
- [3] 施生晶,车慧清.注重基础 突显能力[J].中学物理,2022,40(9):62-65.