



物理图像的渐变与突变

——以“单摆模型”为例

张锐 周伊

(北京市十一学校 北京 100039)

(收稿日期:2022-12-05)

摘要:高中阶段经典力学相关问题中,当物理过程的约束条件不发生突变时,相关物理量应为顺延性变化,体现为连续性函数.单摆作为简谐运动的典型模型,摆球在摆动过程中,约束条件不变,位移、速度、加速度等物理量随时间的变化均为正余弦函数的形式,是连续变化的.因此,可以预测摆球受到细线的拉力随时间也应连续变化,而人教版教材“机械振动”一章习题中关于拉力随时间变化图像存在不可导的突变点,针对这一问题,进行了深入讨论,结合数学工具模拟拉力随时间变化关系,对教材上的习题进行订正,帮助学生建立起分析图像问题的物理观念与基本方法.

关键词:单摆模型;图像分析;连续性

1 原题呈现

人教版教材高中物理选择性必修第一册《机械振动》“复习与提高”B组中有这样一个问题(60页第5题)^[1]:

如图1(a)所示, O 点为单摆的固定悬点,将力传感器接在摆球和 O 点之间.现将摆球拉到 A 点,释放摆球,摆球将在竖直平面内的 A 、 C 之间来回摆动,其中 B 点为运动中的最低位置.图1(b)表示细线对摆球的拉力大小 F 随时间 t 的变化曲线,图中 $t=0$ 为摆球从 A 点开始运动的时刻,重力加速度 g 取 10 m/s^2 .求:

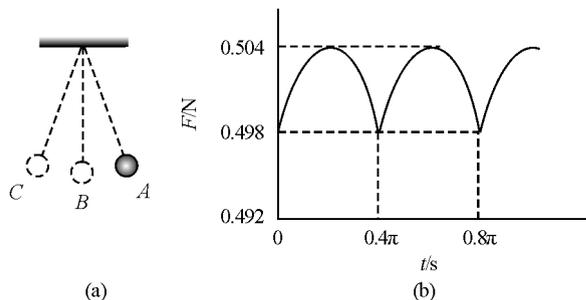


图1 原题题图

(1) 单摆的振动周期和摆长;

(2) 摆球的质量;

(3) 摆球运动过程中的最大速度.

通过分析图像,将图像中特殊值与振动过程中的状态一一对应,就可以求解这个问题.当 $t=0$ 、 0.4π 、 0.8π 、 \dots 时,此时细线对摆球的拉力最小,说明此时摆球处于振动过程中的最高点,即可能是 A 、 C 两点处.根据简谐运动的对称性,当 $t=0.2\pi$ 、 0.6π 、 \dots 时,此时细线对摆球的拉力最大,摆球处于振动过程的最低点,即 B 处.

单摆振动过程中一个周期内经过两次最低点,可知单摆周期为 $T=0.8\pi$.结合单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,可得摆长 $l=1.6\text{ m}$.

要分析摆球的质量 m 和运动过程中的最大速度 v_m ,我们需要具体研究摆球在最高点和最低点的受力特点.根据机械能守恒定律,摆球运动至最低点时速度最大.假设摆球振动过程中的最大摆角为 θ_0 ,则在最高点,即 A 或 C 处时,沿绳方向受力平衡,可知 $F_1=mg\cos\theta_0$,其中 $F_1=0.498\text{ N}$.

在最低点,即 B 处时,沿绳方向合外力提供向心力, $F_2-mg=m\frac{v_m^2}{l}$,其中, $F_2=0.504\text{ N}$.

由最高点运动至最低点过程中,根据动能定理

$$\frac{1}{2}mv_m^2 - 0 = mgl(1 - \cos \theta_0)$$

将上述方程联立,可以解得摆球质量 $m = 0.05$ kg,运动过程中最大摆角满足 $\cos \theta_0 = 0.996$,最大速度

$$v_m = \frac{4}{25}\sqrt{5} \text{ m/s}$$

由此可知,图像问题的处理,学生需要具备基本的力与运动的物理观念、读图与分析图像的能力、模型建构的能力和运用牛顿运动定律分析动力学问题的能力,这都是教学过程中重点落实的相关内容,但仔细观察上述图片,学生可能会产生一个疑问:摆球在振动过程中,受到外界约束条件并没有发生变化,描述运动的物理量,如位移、速度、加速度均发生顺延性变化,即随时间的变化规律均为连续性函数,为什么摆球提供的拉力 F 随时间 t 的变化函数会呈现出不连续、不可导的突变点呢?

这与学生在高中阶段接触的经典力学相关的观念是不相符的,当约束条件不变或者连续变化时,物理量的变化也应是渐变的^[2].以运动学中常见的上抛运动的图像问题为例,物体以一定的初速度向上抛出,以竖直向上为正方向.若不考虑空气阻力的影响,则物体速度 v 随时间 t 的变化曲线如图 2(a) 所示,为连续曲线;若物体运动过程中受到大小不变空气阻力的影响,则物体速度 v 随时间 t 的变化曲线如图 2(b) 所示,由于上升过程和下降过程的阻力在最高点处发生突变(方向突变),图像曲线出现不连续的突变点;再进一步,若考虑物体所受空气阻力大小与物体速率成正比,则物体速度 v 随时间 t 的变化曲线如图 2(c) 所示,由于阻力的变化是连续的,因此 $v-t$ 关系曲线仍为连续曲线.

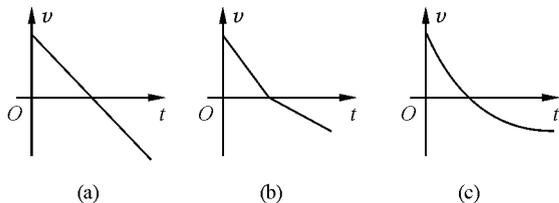


图2 竖直上抛运动 $v-t$ 图像

根据上述分析可知,在经典力学阶段,在约束条件不变或者连续变化的情况下,状态参量的变化应为连续性的.基于这一想法,我们对人教版教材中的上述问题进一步进行分析,方法与上述讨论完全相同.

假设细线偏离竖直方向的夹角为 θ ,根据题设条件可知,单摆振动的周期 $T = 0.8\pi$ s,则角度 θ 随时间 t 的变化关系为 $\theta = \theta_0 \cos(2.5t)$,其中, θ_0 满足

$$\cos \theta_0 = 0.996$$

在某角度 θ 时,沿绳方向摆球受力分析

$$F - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{l}$$

根据动能定理有

$$mgl(1 - \cos \theta_0) - mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$$

联立上述两式可得

$$F = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_0$$

将数据 $m = 0.05$ kg, $\cos \theta_0 = 0.996$, $g = 10$ m/s² 代入可得

$$F = 1.5 \cos \theta - 0.996$$

即拉力 F 随时间 t 变化的关系为

$$F = 1.5 \cos[\theta_0 \cos(2.5t)] - 0.996$$

为连续函数,通过数学软件可以画出 $F-t$ 图像如图 3 所示,与图 1(b) 所画图像有很大的差别.

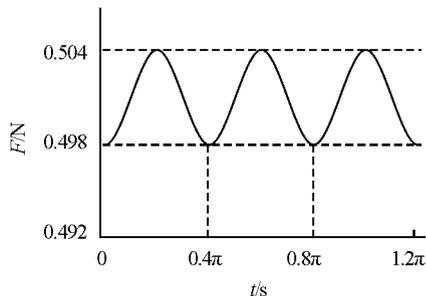


图3 $F-t$ 图像

综合上述可知,对于多过程的物理问题,由于约束条件差异,会使得状态参量的变化规律有所不同,但在经典力学的框架下,若约束条件不变或者连续变化,各物理量也应为连续变化.在物理过程的图像中,不连续或不可导的突变点一定对应着物理过程中约束条件的突变.因此,学生在处理图像相关问题时,应慎重对待图像中的不连续或不可导的突变点.图像的信息,不仅仅包括变化趋势、斜率、截距等,更包含着与运动过程的对应关系、约束条件的影响,而我们在教学过程中也应有所关注.

参考文献

- [1] 彭前程. 普通高中教科书物理选择性必修第一册[M]. 北京:人民教育出版社,2020:56.
- [2] 高翔. 基于函数连续性和间断性的视角解构“拐点”和“间断点”[J]. 中学物理教学参考,2021,50(1):1-9.