论匀速运动有限长带电直导线的位移电流

吴冰驰

（广东工业大学轻工化工学院　广东 广州　510000）

（收稿日期：2022－12－08）

摘　要：通过研究匀速运动有限长带电直导线的位移电流，发现了位移电流和传导电流之间密切关联.

关键词：传导电流；位移电流；全电流

麦克斯韦假设存在位移电流，从而将安培环路定理推广到全电流定律，从表达式上很难看出传导电流和位移电流之间的密切联系，通过求解匀速运动有限长带电直导线的位移电流，发现了传导电流和位移电流之间的密切关系.

1　匀速运动有限长均匀带电直导线的位移电流

真空状态，在空间直角坐标系中，带正电荷直导线两端点为 A 和 B，长度为 l，电荷线密度为 λ，导线和 x 轴重叠，沿 x 轴正方向以速率 v 做匀速直线运动，t 时刻 A 点位于 x 轴上的坐标点为 $(vt,0,0)$，t 时刻 B 点位于 x 轴上的坐标点为 $(vt+l,0,0)$. $\boldsymbol{r}_1=(x-vt)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是 A 点到场点 $P(x,y,z)$ 的矢径，矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 与 x 轴之间的夹角为 θ_1，$\boldsymbol{r}_2=(x-vt-l)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是 B 点到场点 $P(x,y,z)$ 的矢径，矢径 $\boldsymbol{r}_2$ 与 x 轴之间的夹角为 θ_2，过 $P(x,y,z)$ 点作 x 轴的垂线，垂线和 x 轴交点为 D，R 为 $P(x,y,z)$ 到 x 轴的距离. 以 D 点为圆心，R 为半径作圆，圆周长为 C，圆面积为 S，圆平面和 x 轴垂直，作圆是为了求通过圆面积 S 的位移电流和环绕圆周 C 的磁场环路积分，如图 1 所示.

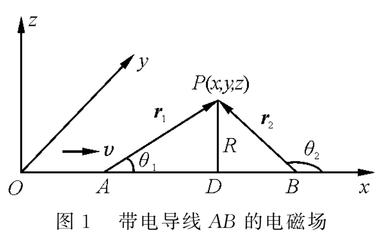

图 1　带电导线 AB 的电磁场

带电运动导线每一无穷小段 dl 相当于点电荷，匀速运动点电荷电磁场方程[1]

$$\boldsymbol{E}=\frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3\,(1-\beta^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{r}\tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\tag{2}$$

其中，$q=\lambda\mathrm{d}\xi$，带电运动导线电场积分如下

$$E_x=\int_0^l \mathrm{d}E_x=$$

$$\int_0^l\frac{\lambda(1-\beta^2)(x-vt-\xi)\mathrm{d}\xi}{4\pi\varepsilon_0\ [(x-vt-\xi)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{\lambda(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{1}{\sqrt{(x-vt-l)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}-$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}\Big]\tag{3}$$

$$E_y=\int_0^l \mathrm{d}E_y=$$

$$\int_0^l\frac{\lambda(1-\beta^2)y\mathrm{d}\xi}{4\pi\varepsilon_0\left[(x-vt-\xi)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0(y^2+z^2)}\Big[\frac{(x-vt)}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}-$$

$$\frac{(x-vt-l)}{\sqrt{(x-vt-l)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}\Big]\tag{4}$$

$$E_z=\int_0^l \mathrm{d}E_z=$$

$$\int_0^l\frac{\lambda(1-\beta^2)z\mathrm{d}\xi}{4\pi\varepsilon_0\left[(x-vt-\xi)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0(y^2+z^2)}\Big[\frac{(x-vt)}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}-$$

$$\frac{(x-vt-l)}{\sqrt{(x-vt-l)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}\Big]\tag{5}$$

带电运动导线上每一无穷小段 dl 的磁场方程满足式(2)，所有无穷小段 dl 的磁场积分也满足式(2)，其中 $\boldsymbol{v}=(v,0,0)$，带电运动导线磁场分解为

$$B_x=0\tag{6}$$

$$B_y=\frac{-\mu_0 v\lambda z}{4\pi(y^2+z^2)}\cdot$$

$$\Big[\frac{(x-vt)}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}-$$

$$\left.\frac{(x-vt-l)}{\sqrt{(x-vt-l)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}\right] \quad (7)$$

$$B_z=\frac{\mu_0 v\lambda y}{4\pi(y^2+z^2)}\cdot$$
$$\left[\frac{(x-vt)}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}-\right.$$
$$\left.\frac{(x-vt-l)}{\sqrt{(x-vt-l)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}}\right] \quad (8)$$

已知 B_y、B_z，对环绕圆周 C 的磁场做环路积分，得到

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{C}=\oint(B_y\mathrm{d}y+B_z\mathrm{d}z)=$$
$$\frac{\mu_0 I}{2}\left(\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_1}}-\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_2}}\right) \quad (9)$$

讨论：

(1) 当 $0\leqslant\theta_1<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_2\leqslant\pi$ 时，传导电流穿过圆截面 S，通过圆截面 S 的位移电流为

$$\varepsilon_0\iint\frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\lambda v+\frac{v\lambda}{2}\cdot$$
$$\left(\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_1}}-\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_2}}\right)=I\left[-1+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_1}}-\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_2}}\right)\right] \quad (10)$$

此处的位移电流和传导电流是正比例关系，位移电流和传导电流方向相反.

将式(10) 乘以 μ_0，移项得

$$\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\iint\frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=$$
$$\frac{\mu_0 I}{2}\left(\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_1}}-\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_2}}\right) \quad (11)$$

比较式(9) 和式(11) 得到

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{C}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\iint\frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad (12)$$

式(12) 为全电流定律表达式.

(2) 当 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_1\leqslant\pi$，$\frac{\pi}{2}<\theta_2\leqslant\pi$；$0\leqslant\theta_1<\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时，此处传导电流未穿过圆截面 S，通过圆截面 S 的位移电流为

$$\varepsilon_0\iint\frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=$$
$$\frac{I}{2}\left(\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_1}}-\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_2}}\right) \quad (13)$$

此处位移电流和传导电流方向相同，位移电流和运动导线产生的传导电流是正比例关系.

式(9) 中当 $\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$ 时，有

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{C}=\mu_0 I \quad (14)$$

式(14) 为无限长运动带电导线的全电流定律，等价于闭合电路稳恒电流的安培环路定理.

2 结束语

通过研究匀速运动均匀带电导线产生的位移电流，得出结论：传导电流穿过截面时，位移电流和传导电流方向相反. 传导电流未穿过截面时，位移电流和运动导线产生的传导电流方向相同. 传导电流和位移电流关系密切，传导电流和位移电流是正比关系. 并且在求解位移电流时，导出了麦斯韦方程组的全电流定律. 匀速运动均匀有限长带电导线形成的电流不随时间变化，所以是稳恒电流，但电流不闭合.

参 考 文 献

[1] 汪德新. 理论物理学导论电动力学(第二卷)[M]. 北京：科学出版社，2005：265－267.

Discussion on the Displacement Current of a Uniformly Moving Finite Length Electrified Straight Wire

WU Bingchi
(School of Chemical Engineering and Light Industry，Guangdong University of Technology，Guangzhou，Guangdong 510000)

Abstract：By studying the displacement current of a uniformly moving finite length charged straight wire，it is found that the displacement current is closely related to the conduction current.

Key words：conduction current；displacement current；full current