对一道经典碰撞习题解析的修正

周洪松

(秦皇岛市第一中学　河北 秦皇岛　066006)

(收稿日期:2022－12－19)

摘　要:引入恢复系数,利用能量守恒定律和动量守恒定律对一道经典碰撞习题的解析进行了修正,并对题中3 种不同碰撞的结果进行了分析.

关键词:碰撞;能量守恒定律;动量守恒定律

1　原题及解析

如图 1 所示,水平地面上 A、B 两个木块用轻弹簧连接在一起,质量分别为 $2m$、$3m$,静止时弹簧恰好处于原长.一质量为 m 的木块 C 以速度 v_0 水平向右运动并与木块 A 相撞.不计一切摩擦,弹簧始终处于弹性限度内,则碰后弹簧的最大弹性势能不可能为(　　)

A. $\dfrac{1}{3}mv_0^2$　　B. $\dfrac{1}{5}mv_0^2$

C. $\dfrac{1}{12}mv_0^2$　　D. $\dfrac{1}{15}mv_0^2$

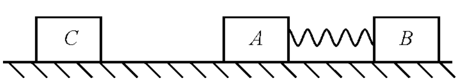

图 1　原题题图

解析:当 C 与 A 发生弹性正碰时,根据动量守恒定律和能量守恒定律有

$$mv_0 = mv_1 + 2mv_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(2m)v_2^2$$

联立解得

$$v_2 = \frac{2}{3}v_0$$

当 A、B 速度相等时弹簧的弹性势能最大,设共同速度为 v_3,以 A 的初速度方向为正方向,则由动量守恒定律得

$$2mv_2 = (2m + 3m)v_3$$

由机械能守恒定律可知

$$E_p + \frac{1}{2}(5m)v_3^2 = \frac{1}{2}(2m)v_2^2$$

解得

$$E_p = \frac{4}{15}mv_0^2$$

当 C 与 A 发生完全非弹性正碰时,根据动量守恒定

此时 Q 点到地面的距离应该为山的高度 h.

由勾股定理有

$$(R + h)^2 = x^2 + (R + h - y)^2$$

代入 x、y 的表达式,有

$$(R + h)^2 = v_0^2t^2 + \left(R + h - \frac{1}{2}gt^2\right)^2$$

解得

$$v_0 = \sqrt{g(R + h) - \frac{1}{4}g^2t^2}$$

由于 t 趋近于零,有

$$v_0 = \sqrt{g(R + h)}$$

又因为 $h \ll R$,所以 $v_0 \approx \sqrt{gR}$.

取 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$,$R = 6.4 \times 10^6\ \mathrm{m}$,计算得 $v_0 \approx 7.9\ \mathrm{km/s}$.可见,用平抛的思路推导出来的第一宇宙速度大小与教材上是一样的.

通过以上思考分析过程,有很多收获:第一,学习要多看教材,往往教材上的一段话就是一个引子,可以帮我们打开一个新的思路.第二,物理真是很奇妙,运用平抛运动规律加上一点简单的数学知识就可以推导出第一宇宙速度.

参 考 文 献

[1] 人民教育出版社,课程教材研究所,物理课程教材研究开发中心.普通高中教科书物理必修第二册[M].北京:人民教育出版社,2019:33.

律有

$$mv_0=3mv_4$$

当 A、B、C 速度相等时弹簧的弹性势能最大，设共同速度为 v_5，则由动量守恒定律得

$$3mv_4=6mv_5$$

由机械能守恒定律可知

$$E_p=\frac{1}{2}(3m)v_4^2-\frac{1}{2}(6m)v_5^2$$

解得

$$E_p=\frac{1}{12}mv_0^2$$

由此可见，碰后弹簧的最大弹性势能范围是

$$\frac{1}{12}mv_0^2\leqslant E_p\leqslant\frac{4}{15}mv_0^2$$

故答案为 A.

2　对原题解析的修正

上述解析中认为 C 与 A 碰撞过程中发生弹性碰撞没有机械能损失，弹簧的弹性势能最大；C 与 A 发生完全非弹性碰撞损失机械能最大，弹簧的弹性势能最小. 但是 C 与 A 发生完全非弹性碰撞后弹簧的弹性势能就一定是最小的吗？假设两个质点碰撞过程中总动能没有损失，则满足动量和能量守恒定律

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

联立解得

$$v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}$$

$$v_2'=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}$$

为了区别碰撞的性质引入恢复系数 e，定义为分离速度和接近速度的比值

$$e=\frac{v_2'-v_1'}{v_1-v_2}$$

则解可以化为

$$v_1'=v_1-(1+e)\frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2}$$

$$v_2'=v_2-(1+e)\frac{m_1(v_2-v_1)}{m_1+m_2}$$

完全弹性碰撞中 $e=1$，完全非弹性碰撞中 $e=0$，当 $0<e<1$ 时，称为非完全弹性碰撞.

本题中 $m_1=m$、$m_2=2m$、$v_2=0$、$v_1=v_0$，代入上式得 A 的速度满足

$$\frac{1}{3}v_0\leqslant v_2'\leqslant\frac{2}{3}v_0$$

所以正确的结果是当 C 与 A 发生弹性碰撞时，A 的速度最大 $\frac{2}{3}v_0$，则 A 和 B 速度相等时弹簧的弹性势能最大为 $\frac{4}{15}mv_0^2$；当 C 与 A 发生非弹性碰撞时，A 的速度趋近于 $\frac{1}{3}v_0$，则 A 与 B 速度相等时有

$$2m\left(\frac{1}{3}v_0\right)=(2m+3m)v$$

弹簧的弹性势能趋近于

$$E_p=\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2-\frac{1}{2}(5m)v^2=\frac{1}{15}mv_0^2$$

当 C 与 A 发生完全非弹性正碰时，A 的速度最小 $\frac{1}{3}v_0$，虽然此时 A 的速度最小，但是 C 与 A 粘在一起，从而改变了质量，反而解得

$$E_p=\frac{1}{15}mv_0^2$$

综上所述碰后弹簧的最大弹性势能范围是

$$\frac{1}{15}mv_0^2<E_p\leqslant\frac{4}{15}mv_0^2$$

则答案为 A、D.