一道竞赛决赛题的多种解法

毛先富
(四川大学附属中学　四川 成都　610044)
吕　庆
(成都市铁路中学　四川 成都　610081)

(收稿日期:2023-01-06)

摘　要:对第 39 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题第 1 题的第 1 问,分别采用力平衡与力矩平衡法,抛物线准线特征求极值法以及三力汇交原理,给出了 3 种不同于原参考解答的解决方案.

关键词:中学生物理竞赛;力矩平衡;极值;三力汇交

1　引言

【例题】(第 39 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题第 1 题的第 1 问) 如图 1 所示,一段抛物线形状的刚形金属丝固定在竖直平面内,抛物线方程为 $y = ax^2$(y 轴竖直向上,a 为待定常量);一长度为 $2l$ 的匀质刚性细杆的两端 A,B 各有一个小圆孔,两圆孔都套在金属丝上.圆孔和金属丝之间非常光滑,摩擦力非常小,可忽略.若给细杆一个冲量,使其运动;经过足够长的时间,细杆静止于平衡位置,此时细杆和水平方向之间的夹角 $\theta = 30°$.已知重力加速度大小为 g.求待定常量 a[1].

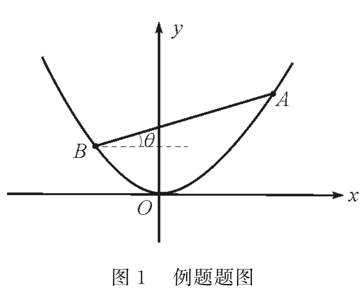

图 1　例题题图

组委会提出的原参考解答[1] 是:先找出细杆质心与 θ 的函数关系,进而通过求势能极值的方式,找出 θ、a、l 之间的关系式而最终得出结果.

基于中学物理竞赛,本文结合竞赛中的力平衡及力矩平衡法,抛物线准线特征求极值法以及三力汇交原理,对该题给出了 3 种新的解答方案.下面分别采用以上 3 种方法具体求解本题.

2　例题的 3 种解法

2.1　采用力平衡与力矩平衡法求解

如图 2 所示,设 A 处杆受到的支持力 N_A 与杆的夹角为 θ_A,B 处受到的支持力 N_B 与杆的夹角为 θ_B.由力平衡得

$$N_A\cos\left(\theta_A - \frac{\pi}{6}\right) = N_B\cos\left(\theta_B + \frac{\pi}{6}\right) \tag{1}$$

$$mg = N_A\sin\left(\theta_A - \frac{\pi}{6}\right) + N_B\sin\left(\theta_B + \frac{\pi}{6}\right) \tag{2}$$

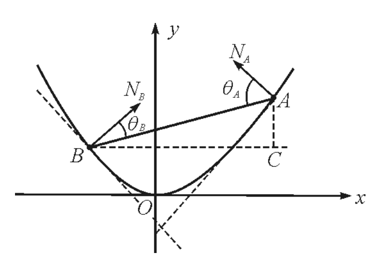

图 2　采用力平衡与力矩平衡法分析图

对于点 A 受力,有力矩平衡

$$2N_B l\sin\theta_B = mgl\cos\frac{\pi}{6} \tag{3}$$

对于点 B 受力,有力矩平衡

$$2N_A l\sin\theta_A = mgl\cos\frac{\pi}{6} \tag{4}$$

联解式(1) ~ (4),可得

$$\theta_A = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_B = \frac{\pi}{6} \tag{5}$$

所以 $$\boldsymbol{N}_A \perp \boldsymbol{N}_B \tag{6}$$

考虑到支持力垂直于接触面,所以 $\boldsymbol{N}_A$ 与钢丝在 A 处的切线 l_A 垂直于 $\boldsymbol{N}_B$ 与钢丝在 B 处的切线 l_B,即

$$\boldsymbol{N}_A \perp l_A, \boldsymbol{N}_B \perp l_B \tag{7}$$

由式(6)、(7) 可得

$$l_A \perp l_B \tag{8}$$

设杆 AB 所在直线方程为

$$y = x\tan\theta + b \tag{9}$$

由于 A、B 都在抛物线上,所以又有

$$y = ax^2 \tag{10}$$

由式(9)、(10) 并将 $\theta = 30°$ 代入,可得

$$ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - b = 0 \tag{11}$$

其两个根分别对应端点 A、B 的 x 轴坐标值,为

$$x_A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{1}{3} + 4ab}}{2a}$$

$$x_B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{\frac{1}{3} + 4ab}}{2a} \tag{12}$$

又由于切线 l_A 与切线 l_B 相互垂直,且它们的斜率分别为

$$k_{l_A} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_A} = 2ax_A$$

$$k_{l_B} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_B} = 2ax_B \tag{13}$$

由式(8) 可得

$$k_{l_A}k_{l_B} = -1 \tag{14}$$

联解式(13)、(14) 可得

$$4a^2x_Ax_B = -1 \tag{15}$$

又由式(11)、(12) 及韦达定理可知

$$x_Ax_B = -\frac{b}{a} \tag{16}$$

由式(15)、(16) 可得

$$4ab = 1 \tag{17}$$

由式(12)、(17) 可得

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{2a} \qquad x_B = -\frac{\sqrt{3}}{6a} \tag{18}$$

点 A、B 对应的 y 轴坐标值分别为

$$y_A = ax_A^2 = \frac{3}{4a} \qquad y_B = ax_B^2 = \frac{1}{12a} \tag{19}$$

又由图 2 可得

$$AC = AB\sin 30° = l \tag{20}$$

且
$$y_A - y_B = AC \tag{21}$$

联解式(19) ~ (21) 可得

$$a = \frac{2}{3l} \tag{22}$$

2.2　采用抛物线准线特征求极值法求解

如图 3 所示,要保证杆稳定,则杆的势能应取极值,设杆的质心为 C,则有

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{23}$$

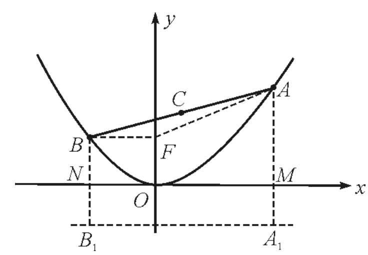

图 3　采用抛线性准线特征求极值法分析图

相对 x 轴,杆具有势能为

$$E_\mathrm{p} = mgy_C \tag{24}$$

势能取极值,由式(23)、(24) 可知,即 $y_A + y_B$ 应取极值. 作抛物线准线交 AM、BN 延长线于 A_1、B_1.

据抛物线特征知,当 $AA_1 + BB_1$ 取极值时,等效于 $y_A + y_B$ 取极值. 设抛物线的焦点为 F,则有

$$AA_1 + BB_1 = AF + BF \geqslant AB$$

仅当 A、B、F 这 3 点共线时不等式取等号. 这表明此时杆过抛物线的焦点 $F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$. 所以可得 AB 所在直线的方程为

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{4a} \tag{25}$$

又因为

$$y = ax^2 \tag{26}$$

联解式(25)、(26) 可得其根为

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{2a} \qquad x_B = -\frac{\sqrt{3}}{6a} \tag{27}$$

将式(27) 代回式(26) 可得对应的纵轴坐标为

$$y_A = \frac{3}{4a} \qquad y_B = \frac{1}{12a} \tag{28}$$

又由图 2 可得

$$AC = AB\sin 30° = l \tag{29}$$

且
$$y_A - y_B = AC \tag{30}$$

联解式(19) ～ (21) 可得

$$a = \frac{2}{3l} \tag{31}$$

2.3　采用三力汇交方法求解

如图 4 所示，仍设 A 点、B 两点的坐标为 $A(x_A, y_A)$，$B(x_B, y_B)$，据抛物线特征有

$$y_A = ax_A^2 \qquad y_B = ax_B^2 \tag{32}$$

$$x_A - x_B = AB\cos\theta = \sqrt{3}\,l \tag{33}$$

$$y_A - y_B = AB\sin\theta = l \tag{34}$$

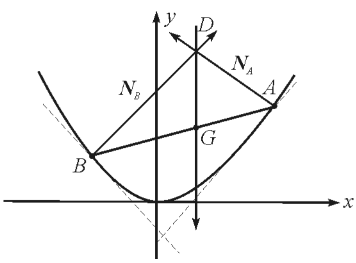

图 4　采用三力汇交法分析图

由式(32)、(34) 得

$$ax_A^2 - ax_B^2 = l \tag{35}$$

由于此时杆平衡，杆受 3 个力 N_A，N_B，G 所在的直线延长线，根据三力汇交原理，必然交于一点，如图 4 中的 D 点. 据此可知，重力所处直线的方程为

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = x_D \tag{36}$$

在抛物线上任一点的切线斜率均可表示为

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2ax \tag{37}$$

而支持力总是与对应点的切线方向垂直，所以支持力所在直线的斜率均可表示为

$$k' = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2ax} \tag{38}$$

则 N_A、N_B 所在直线的方程可以分别表示为

对于 N_A　$$y = -\frac{1}{2ax_A}x + y_A + \frac{1}{2a} \tag{39}$$

对于 N_B　$$y = -\frac{1}{2ax_B}x + y_B + \frac{1}{2a} \tag{40}$$

联解式(39)、(40) 可得两力所在直线的交点 D 的横坐标为

$$x_D = -2a^2(x_A + x_B)x_A x_B \tag{41}$$

根据三力汇交，该交点也必过重力所处直线的方程. 联解式(36) 与式(41)，可得

$$4a^2 x_A x_B = -1 \tag{42}$$

又由式(33)、(35) 可得

$$x_A + x_B = \frac{\sqrt{3}}{3a} \tag{43}$$

联解式(33)、(42)、(43) 即得

$$a = \frac{2}{3l} \tag{44}$$

3　总结

本文给出的 3 种解法，均与原题的参考解答有所不同. 对准备参加中学物理竞赛的学生来说，虽然本文的几种解答方案计算过程及步骤会稍多一点，但由于它们更多地使用了中学生熟悉的数学和物理知识. 与组委会所提供的参考解答相比，本文所提的几种新的解题思路相对较为直观，也相对更容易被想到.

另外，以上 3 种解答，可以归纳为一种模型，即“抛物线和三角形板模型”的应用. 文中杆的两端点以及两个弹力的延伸交点，这 3 个点，等效完整地构成了一个三角形.

具体来说，本文采用的力矩平衡法、利用抛物线准线特征法以及三力汇交法，都是准备参加中学物理竞赛的学生们应该掌握的竞赛常用方法. 其中，力矩平衡法多用于刚体转动，三力汇交常见于刚体或质点系统的平衡，抛物线准线特征法则较多用于抛物线轨道. 这些都可以归之为“抛物线和三角形板模型”的具体应用.

本文解答所用的方法不仅适用于平面问题，也适用于立体系统如椭圆曲面、球面或旋转抛物面等，即从二维平面延展到三维空间，以上 3 种方法在理论上仍然是成立的.

物理问题中，尝试用多种方法考虑问题的求解，并学会归纳总结，甚至提炼出某种新的理论模型，是打开思路并成功解决问题的一种事半功倍的较好办法.

参考文献

[1] 第 39 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题.