

弹簧振子类试题数据设计的自洽性研究

何崇荣 张黎

(武汉市黄陂区第一中学 湖北 武汉 430300)

(收稿日期:2023-01-14)

摘要:在命制弹簧振子类试题设计数据时不能想当然,要根据动力学方程得出物体的运动规律,然后恰当的设计数据.结合具体的两个案例,分别给出单弹簧振子和双弹簧振子类试题数据是否自洽的论证方法.

关键词:弹簧振子;数据;自洽;命制

弹簧振子是高中阶段的一个重要物理模型,借助该模型可以考查牛顿运动定律、动量和能量等高考主干知识.然而在命制弹簧振子类试题设计数据时容易想当然,造成数据不自洽.下面结合具体的两个案例,分别给出单弹簧振子和双弹簧振子类试题数据设计是否自洽的论证方法.

1 弹簧连一物体的单振子

【例1】如图1(a)所示,在倾角为 37° 足够长的粗糙斜面底端,一质量 $m=1\text{ kg}$ 的滑块压缩着一轻弹簧且锁定,但它们并不相连,滑块可视为质点. $t=0$ 时解除锁定,计算机通过传感器描绘出滑块的 $v-t$ 图像如图1(b)所示,其中 Oab 段为曲线, bc 段为直线,在 $t_1=0.1\text{ s}$ 时滑块已上滑 $x=0.2\text{ m}$ 的距离(取 $g=10\text{ m/s}^2$, $\sin 37^\circ=0.6$, $\cos 37^\circ=0.8$).则()

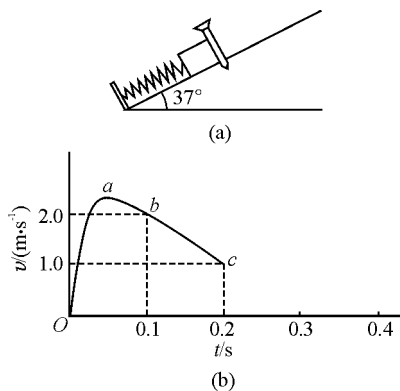


图1 例1题图

- A. 滑块与斜面之间的动摩擦因数 $\mu=0.1$
 B. 滑块与斜面之间的动摩擦因数 $\mu=0.2$

C. $t=0.4\text{ s}$ 时滑块的速度大小为 1.0 m/s

D. $0\sim 0.1\text{ s}$ 内弹簧弹力做功 4 J

解析:由题意可知,滑块在 $t_1=0.1\text{ s}$ 时与弹簧分离,之后沿斜面向上做匀减速,根据牛顿第二定律有

$$mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta = ma_1$$

由图1(b)可知

$$a_1 = \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \frac{2-1}{0.1} \text{ m/s}^2 = 10 \text{ m/s}^2$$

于是解得

$$\mu = 0.5$$

在 $0\sim 0.1\text{ s}$ 内,根据动能定理有

$$-mgx \sin \theta - \mu mgx \cos \theta + W = \frac{1}{2}mv_b^2$$

解得

$$W = 4\text{ J}$$

滑块沿斜面下滑过程,根据牛顿第二定律有

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = ma_2$$

滑块与弹簧分离后,沿斜面向上运动时间 t_3 ,则

$$v_b = a_1 t_3$$

$t=0.4\text{ s}$ 时滑块的速度

$$v = a_2(t - t_3)$$

解得

$$v = 2\text{ m/s}$$

所以正确选项为D.

疑问:题目给出的条件是否存在不自洽问题?

滑块沿斜面向上的运动为简谐运动,以平衡位置为原点,沿斜面向上为正方向,设 $t=0$ 时滑块距离弹簧原长处为 d ,振幅为 A ,周期为 T ,则滑

块偏离平衡位置的位移

$$x = -A \cos \omega t$$

速度

$$v = \omega A \sin \omega t$$

其中

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{m}$$

$t_1 = 0.1$ s 时, 滑块位移

$$x_1 = -A \cos \omega t_1 = d - A \quad (1)$$

滑块速度

$$v_b = \omega A \sin \omega t_1 \quad (2)$$

已知 $d = 0.2$ m $t_1 = 0.1$ s

$v_b = 2$ m/s $T > 0.1$ s

可以求出 A 与 ω , 具体求解如下.

由式(1)得

$$A = \frac{d}{1 - \cos \omega t_1}$$

将其代入式(2)得

$$\tan \frac{\omega t_1}{2} = \frac{\omega d}{v_b} \quad (3)$$

物体在平衡位置时

$$mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta = \kappa x_1 = \kappa(d - A) \quad (4)$$

解得

$$\mu = \frac{\omega^2(d - A)}{g \cos \theta} - \tan \theta = -\frac{\omega^2 d \cos \omega t_1}{g \cos \theta (1 - \cos \omega t_1)} - \tan \theta$$

代入数据, 结合 $T > 0.1$ s, 利用式(3)由数值计算可得

$$\omega = 23.3 \text{ rad/s}$$

此时 $A = 0.118$ m, $\mu = 4.815$, 而根据图 1(b) 中的 bc 段可得 $\mu = 0.5$, 两者相矛盾, 所以题目数据设计不自洽.

也可以通过图 1(b) 中 bc 段的条件: $t_1 = 0.1$ s 时, $v_b = 2$ m/s; $t_2 = 0.2$ s 时, $v_c = 1$ m/s, 来验证 0.1 s 内物体运动距离 d 是否等于 0.2 m, 具体验证如下:

设 $0.1 \sim 0.2$ s 内滑块加速度大小为 a , 根据牛顿第二定律有

$$a = g(\sin \theta + \mu \cos \theta) = 10 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

联立式(1)、(2)、(4)、(5)解得

$$\tan \omega t_1 = -\frac{\omega v_b}{a} \quad (6)$$

$$d = -\frac{a(1 - \cos \omega t_1)}{\omega^2 \cos \omega t_1} \quad (7)$$

代入数据, 结合 $T > 0.1$ s, 利用式(6)由数值计算可得 $\omega = 18.35$ rad/s, 此时 $d = 0.143$ m. 这与题目给出 $d = 0.2$ m 相矛盾, 说明数据设计不自洽.

改进方案: 要么不用给出在 $t_1 = 0.1$ s 时滑块已上滑距离 d (题目中用 x 表示) 的值, 就用字母表示, 这样计算 $0 \sim 0.1$ s 内弹簧弹力做功用 d 表示即可. 或者通过已知 $t_1 = 0.1$ s 时 $v_b = 2$ m/s, $t_2 = 0.2$ s 时 $v_c = 1$ m/s, 这些条件计算出 d 的值, 设置 $d = 0.14$ m, 两种处理都可以确保题目数据严谨自洽.

2 弹簧连两物体的双振子

【例 2】(2022 年高考全国乙卷) 如图 2(a), 一质量为 m 的物块 A 与轻质弹簧连接, 静止在光滑水平面上; 物块 B 向 A 运动, $t = 0$ 时与弹簧接触, 到 $t = 2t_0$ 时与弹簧分离, 第一次碰撞结束, A、B 的 $v-t$ 图像如图 2(b) 所示. 已知从 $t = 0$ 到 $t = t_0$ 时间内, 物块 A 运动的距离为 $0.36v_0 t_0$. A、B 分离后, A 滑上粗糙斜面, 然后滑下, 与一直在水平面上运动的 B 再次碰撞, 之后 A 再次滑上斜面, 达到的最高点与前一次相同. 斜面倾角为 θ ($\sin \theta = 0.6$), 与水平面光滑连接. 碰撞过程中弹簧始终处于弹性限度内. 求:

- (1) 第一次碰撞过程中, 弹簧弹性势能的最大值;
- (2) 第一次碰撞过程中, 弹簧压缩量的最大值;
- (3) 物块 A 与斜面间的动摩擦因数.

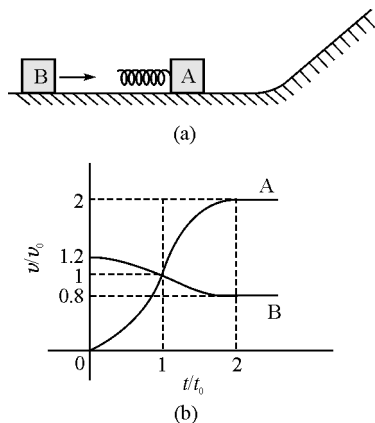


图 2 例 2 题图

解析: 略.

疑问:题目已知从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 时间内,物块 A 运动的距离为 $0.36v_0t_0$,这个数据的设计是否严谨?接下来我们作具体的研究.

设弹簧原长为 l_0 ,劲度系数为 κ ,A、B 的质量分别为 m_A 和 m_B ,以 B 与弹簧接触时的位置为坐标原点 O ,建立如图 3 所示的一维坐标系.

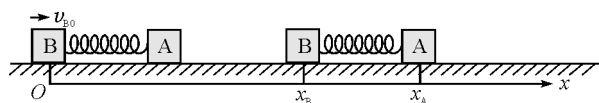


图3 光滑水平面上双弹簧振子

解:对 A,根据牛顿第二定律有

$$-F = -\kappa(x_A - x_B - l_0) = m_A a_A \quad (8)$$

对 B,根据牛顿第二定律有

$$F = \kappa(x_A - x_B - l_0) = m_B a_B \quad (9)$$

分析 A 相对 B 的运动,A 相对于 B 的位移

$$x = x_A - x_B \quad (10)$$

A 相对于 B 的加速度

$$a = a_A - a_B \quad (11)$$

A 相对于 B 的速度

$$v = v_A - v_B$$

联立式(8)~(11)得

$$a = -\frac{F}{m_A} - \frac{F}{m_B} = -\frac{F}{\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}} = -\frac{\kappa(x - l_0)}{\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}}$$

$$\text{令} \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}}$$

则 $a = -\omega^2(x - l_0)$

所以 A 相对于 B 做简谐运动

$$x - l_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

初始条件 $t=0$ 时

$$x = l_0 \quad v = -v_{B0} < 0$$

则

$$A \cos \varphi = 0 \quad -\omega A \sin \varphi = -v_{B0}$$

所以

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$v_{B0} = \omega A$$

$$v = -v_{B0} \cos \omega t$$

根据系统动量守恒定律有

$$m_B v_{B0} = m_B v_B + m_A v_A$$

A 相对 B 的速度

$$v = v_A - v_B = -v_{B0} \cos \omega t$$

解得

$$v_A = \frac{m_B v_{B0}}{m_A + m_B} (1 - \cos \omega t)$$

由图 2(b) 可知

$$T = 4t_0 \quad v_{B0} = 1.2v_0$$

A、B 分离时

$$v_A = 2v_0 \quad v_B = 0.8v_0$$

于是可得

$$m_B = 5m$$

$$\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$v_A = v_0 (1 - \cos \omega t)$$

从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 时间内,物块 A 运动的距离为

$$x_A = \int_0^{t_0} v_A dt = v_0 t_0 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \approx 0.363v_0 t_0$$

所以题目设计 A 运动距离为 $0.36v_0 t_0$ 是很严谨的,不存在数据不自洽.

上面推导两物体运动规律时,采用学生容易接受的地面参考系来研究,推导出两者间的相对运动为简谐运动.我们也可以在系统质心系中研究两物体的运动情况,这里不具体展开.

3 总结

我们在命制弹簧振子类试题设计数据时不能想当然,要根据动力学方程得出物体的运动规律,然后恰当地设计数据.如果涉及的动力学方程求解比较困难,可以借助数学软件进行数值求解或模拟.这种方法对于其他问题数据设计也是适用的,比如机车启动问题、含弹簧系统的能量问题、电磁感应中动力学及能量问题等等.

参考文献

- [1] 何崇荣.对 2010 年全国高考理综卷(福建)第 22 题题目数据的质疑[J].物理教师,2011(10):70-71.
[2] 何崇荣.对 2011 年高考山东理综卷第 22 题定量解答的补充[J].物理通报,2015(4):107-108.