带电粒子在正交均匀的电磁场中的二维运动

白映祥

(甘肃省陇南武都八中　甘肃 陇南　746000)

(收稿日期:2022－06－10)

摘　要:通过论证,证明沿与磁场方向垂直的平面射入的带电粒子在正交均匀的电、磁场中运动轨迹是旋轮线,粒子的运动轨迹选择 3 种旋轮线中的一种.解决了一个常常困扰中学生的物理问题.

关键词:带电粒子;电磁场;旋轮线

在正交均匀的电、磁场中,沿与磁场方向垂直的平面射入的带电粒子是否会处于平衡状态?这是中学生常常提出的一个问题.本文在探讨这个问题时,不考虑粒子所受的重力.

1　带电粒子在正交均匀电磁场中的运动分析

设在空间某一区域内充满着电场强度为 $\boldsymbol{E}$ 的匀强电场和磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的匀强磁场(图 1),$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$,一质量为 m,电荷量 $+q$ 的粒子,以与 $\boldsymbol{B}$ 垂直的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 进入场内,$\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的夹角为 θ_0.

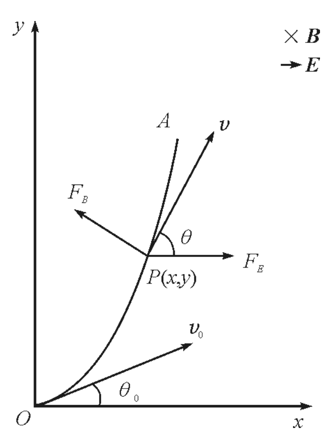

图 1　带电粒子射入正交均匀的电磁场

一般地说,该粒子将在与 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面内做曲线运动,为确定粒子的运动轨迹,我们取直角坐标系的 xOy 平面与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,x 的正方向与 $\boldsymbol{E}$ 的正方向一致,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 垂直纸面向里,粒子进入场内时的点 O 为坐标原点.设粒子进入场内时开始计时,经时间 t 后它到达 xOy 平面内曲线 OA 上的 $P(x,y)$ 点,此时粒子的速度 v 与 $\boldsymbol{E}$ 的正向的夹角为 θ,于是我们有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_E-F_B\sin\theta \tag{1}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_B\cos\theta \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\cos\theta \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\sin\theta \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2+F_Ex \tag{5}$$

式中

$$F_E=qE$$

$$F_B=qvB$$

由式(2)和(3)得

$$m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\int qvB\cos\theta\mathrm{d}t+C_1=$$

$$\int qB\mathrm{d}x+C_1=qBx+C_1$$

因为当 $x=0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0\sin\theta_0$$

故　$C_1=mv_0\sin\theta_0$

所以

$$m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=mv\sin\theta=qBx+mv_0\sin\theta_0 \tag{6}$$

由式(1) 和(6) 得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_E-F_B\sin\theta=$$

$$F_E-qBv\sin\theta=$$

$$F_E-qB\frac{qBx+mv_0\sin\theta_0}{m}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q^2B^2}{m}x-(F_E-qBv_0\sin\theta_0)=0$$

这个微分方程的解是

$$x=-A\cos(\omega t+\varphi)+\frac{F_E-qBv_0\sin\theta_0}{K}$$

式中

$$K=\frac{q^2B^2}{m}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{qB}{m}$$

令

$$P=\frac{F_E-qBv_0\sin\theta_0}{K}=\frac{m(E-Bv_0\sin\theta_0)}{qB^2}$$

则

$$x=-A\cos(\omega t+\varphi)+P \tag{7}$$

因为当 $t=0$ 时

$$x=0$$

所以

$$P=A\cos\varphi \tag{7a}$$

式(7) 对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

因为当 $t=0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\cos\theta_0$$

所以

$$v_0\cos\theta_0=\omega A\sin\varphi \tag{7b}$$

由式(7a) 和(7b) 得

$$A=\sqrt{P^2+\left(\frac{v_0\cos\theta_0}{\omega}\right)^2}=$$

$$\frac{m}{qB^2}\sqrt{E^2+B^2v_0^2-2BEv_0\sin\theta_0}$$

$$\tan\varphi=\frac{v_0\cos\theta_0}{\omega P}$$

而因为

$$m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=qBx+mv_0\sin\theta_0$$

有

$$m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=qB[-A\cos(\omega t+\varphi)+P]+mv_0\sin\theta_0$$

积分上式得

$$my=-\frac{qBA}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+$$

$$(qBP+mv_0\sin\theta_0)t+C_2$$

因为 $t=0$ 时,$y=0$,所以

$$C_2=\frac{qBA}{\omega}\sin\varphi=mA\sin\varphi$$

因此

$$y=-A\sin(\omega t+\varphi)+\frac{E}{B}t+A\sin\varphi \tag{8}$$

下面进行坐标变换:

设

$$l=\frac{mE}{qB^2}-P$$

令

$$x'=x+l$$

由式(7) 得

$$x'=\frac{mE}{qB^2}-A\cos(\omega t+\varphi) \tag{9}$$

令

$$y'=y-A\sin\varphi+\frac{mE}{qB^2}\varphi$$

则由式(8) 得

$$y'=\frac{mE}{qB^2}(\omega t+\varphi)-A\sin(\omega t+\varphi) \tag{10}$$

于是在新坐标系 $x'O'y'$ 中,有

$$x'=\frac{mE}{qB^2}-A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$y'=\frac{mE}{qB^2}(\omega t+\varphi)-A\sin(\omega t+\varphi)$$

这是以 $\omega t+\varphi$ 为参变量的旋轮线参变方程.由此得知,带电粒子在正交的匀强电场和匀强磁场中的运动轨迹是旋轮线.

1) 当 $v_0=0$ 及 $\frac{v_0}{\sin\theta_0}=\frac{2E}{B}$ 时,有

$$B^2v_0^2 - 2EBv_0\sin\theta_0 = 0$$

这对应于

$$A = \frac{mE}{qB^2}$$

而当 $v_0 = 0$ 时,参变方程(9)和(10)简化为

$$x' = x = \frac{mE}{qB^2}(1 - \cos\omega t)$$

$$y' = y = \frac{mE}{qB^2}(\omega t - \sin\omega t)$$

所以,带电粒子的运动轨迹犹如半径为$\frac{mE}{qB^2}$的轮沿 Oy 轴[$v_0 = 0$, 图 2(a) 中的 a]或 $O'y'$ 轴$\left[\frac{v_0}{\sin\theta_0} = \frac{2E}{B}\text{,图 2(a) 中的 } b\right]$滚动时轮沿上一点画出的曲线.

2)当$\frac{v_0}{\sin\theta_0} > \frac{2E}{B}$时,$A > \frac{mE}{qB^2}$

此时带电粒子的运动轨迹犹如半径为$\frac{mE}{qB^2}$的轮沿 $O'y'$ 轴滚动时的距轮心为 A 的轮外一点所画出的曲线,称为长幅旋轮线[图 2(b)].

3)当$\frac{v_0}{\sin\theta_0} < \frac{2E}{B}$时,$A < \frac{mE}{qB^2}$

这时粒子的运动轨迹犹如半径为$\frac{mE}{qB^2}$的轮沿 $O'y'$ 轴滚动时距轮心为 A 的轮内一点所画出的曲线,称为短幅旋轮线[图 2(c)].

4)特别的,当 $v_0 = \frac{E}{B}$,$\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,由 A 及 P 的表达式可得 $A = 0$,$P = 0$,由式(7)和(8)得

$$x = 0 \qquad y = \frac{E}{B}t = vt$$

这表明此时带电粒子沿 y 轴做匀速直线运动.

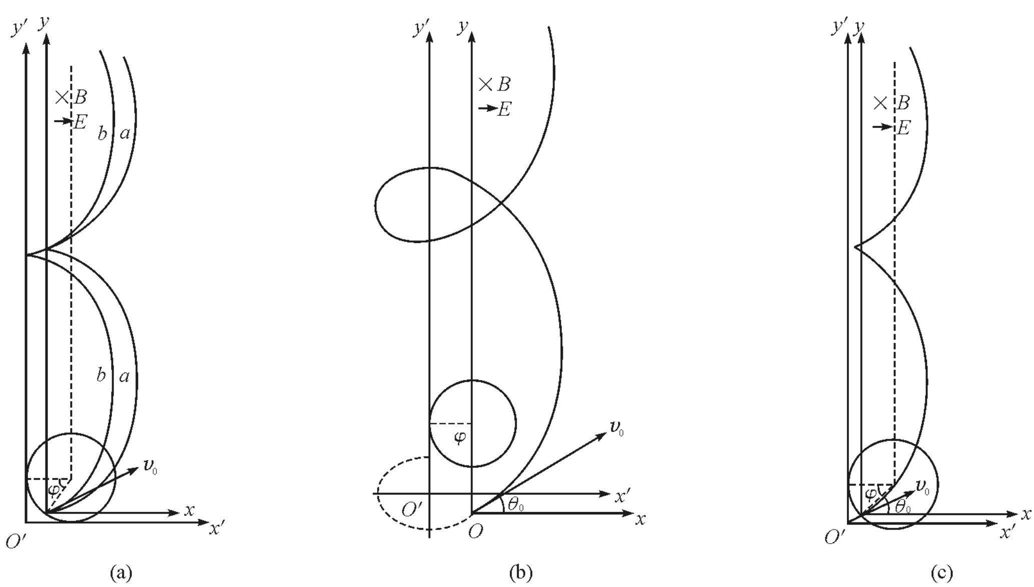

图 2 正电子在相互垂直的匀强电、磁场中的二维运动

2 带电粒子在正交均匀电磁场中的受力分析

现在我们来考查带电粒子在运动中的受力情况.

x 有极值的条件是式(7)的导数为零

$$\frac{dx}{dt} = \omega A\sin(\omega t + \varphi) = 0$$

即当 x 有极值时,粒子的水平分速度为零,且

$$\omega t + \varphi = 2n\pi, (2n+1)\pi, (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

这时

$$v = \frac{dy}{dt} = -\omega A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{B}$$

因为粒子只具有沿 y 方向的分速度,所以作用在粒子上的电场力和洛伦兹力必在一直线上.

1)当 $\omega t + \varphi = (2n+1)\pi$ 时,$v = \frac{E}{B} + \omega A$,作用在粒子上的合力

$$F=F_E-F_B=qE-qB\left(\frac{E}{B}+\omega A\right)=-qB\omega A$$

负号表示合力的方向跟电场强度的方向相反.

2) 当 $\omega t+\varphi=2n\pi$ 时，$v=\frac{E}{B}-\omega A$，作用在粒子上的合力分 3 种情况计算.

① 若 $A=\frac{mE}{qB^2}$，则合力

$$F'=F_E-F_B=$$

$$qE-qB\left(\frac{E}{B}-\omega A\right)=qE-0=qE$$

② 若 $A>\frac{mE}{qB^2}$，则合力

$$F''=F_E-F_B=$$

$$qE-qB\left[-\left(\omega A-\frac{E}{B}\right)\right]=q\omega BA$$

③ 若 $A<\frac{mE}{qB^2}$，则合力取

$$F''=F_E-F_B=$$

$$qE-qB\left(\frac{E}{B}-\omega A\right)=q\omega BA$$

3) 当 $\omega t+\varphi$ 取 $2n\pi$ 及 $(2n+1)\pi$ 以外的其他值时，电场力和洛伦兹力都不可能在同一直线上. 因此，除了 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$v_0=\frac{E}{B}(A=0)$ 这一情况外，作用在粒子上的电场力、洛伦兹力是绝不会平衡的.

3　进一步的思考

综上所述，除粒子以 $v_0=\frac{E}{B}$ 的速率垂直于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 射入场内这一特殊情况外，在其他一切情形下，粒子都不会做匀速直线运动，而因 $\frac{v_0}{\sin\theta_0}$ 的不同，粒子的运动轨迹选择 3 种旋轮线中的一种.

最后应该指出，因为式(9)、(10) 右端的第一项和第二项中都含有共同因子 q，所以将 q 换为 $-q$ 时，x' 和 y' 同时变号，即 $-q$ 粒子与 $+q$ 的运动轨迹对坐标原点 O' 对称.

下面是参考数据(以正电子为例)

$$m=9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

$$q=1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

由图 2(a) 有

$$\frac{mE}{qB^2}\approx0.23\ \mathrm{m}$$

$$l\approx0.11\ \mathrm{m}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$A\varphi-A\sin\varphi\approx0.04\ \mathrm{m}$$

由图 2(b) 有

$$\frac{mE}{qB^2}\approx0.23\ \mathrm{m}$$

$$A=2\frac{mE}{qB^2}$$

$$l\approx0.25\ \mathrm{m}$$

$$\varphi\approx0.53\pi$$

$$\frac{mE}{qB^2}\varphi-A\sin\varphi\approx-0.11\ \mathrm{m}$$

由图 2(c) 有

$$\frac{mE}{qB^2}\approx0.23\ \mathrm{m}\qquad A\approx0.20\ \mathrm{m}$$

$$l\approx0.05\ \mathrm{m}\qquad \varphi=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{mE}{qB^2}\varphi-A\sin\varphi\approx0.02\ \mathrm{m}$$

在图 2(a) 中　　$A=\frac{mE}{qB^2}$

在图 2(b) 中　　$A>\frac{mE}{qB^2}$

在图 2(c) 中　　$A<\frac{mE}{qB^2}$

图 2 为正电子在相互垂直的匀强电、磁场中的二维运动，具体数值如下.

在图 2(a) 中　　曲线 $a-v_0=0$

曲线 $b-v_0=2.0\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$

在图 2(b) 中　　$v_0=4.6\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$

在图 2(c) 中　　$v_0=1.0\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$

$$E=1.0\times10^{4}\ \mathrm{N/C}$$

$$B=5.0\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

$$\sin\theta_0=\frac{1}{2}$$