



粒子偏转的另类无穷解

——带电粒子在匀强正三角磁场内外偏转问题研究

贾平

(苏州科技城外国语高级中学 江苏 苏州 215000)

(收稿日期:2023-02-06)

摘要:探讨了正三角形区域内、外分布两个方向相反但磁感应强度相同的匀强磁场,带电粒子从底边中点垂直直射的偏转问题.根据首次偏转的圆心角是否为特殊角,将偏转轨迹分为常规和非常规两类.通过对非常规偏转情况的建模和归纳总结,不难得到不存在能垂直回到原点的最大粒子速度.

关键词:常规偏转;非常规偏转;Geogebra;偏转轨迹

1 引言

带电粒子在磁场中运动的周期性回归问题(即带电粒子在不同形状的磁场中做周期性运动后回到初始位置的问题)是高中磁场类题目中的一个难点^[1],因其能有效考查学生数理结合能力,读图形画图能力、空间思维能力,此类问题成为高考的热点^[2].命题人在命制带电粒子在磁场中的周期性运动问题时,需要明晰粒子运动轨迹,以确保命题准确和严谨.本文以2022年苏州高三上学期期末试卷压轴题为例,着重阐述带电粒子在三角形磁场区域中的运动轨迹,为高中物理教学提供有价值的参考.

【例题】如图1所示,边长为 a 的正三角形 PMN 区域内存在匀强磁场,磁感应强度大小为 B 、方向垂直于纸面向外,在 PMN 区域外存在足够大的匀强磁场,磁感应强度大小也为 B 、方向垂直于纸面向里.大量质量为 m 、电荷量为 q 的粒子,以大小不同的速度从 MN 的中点 O 垂直射入正三角形 PMN 区域内部,不计重力及粒子间的相互作用,一部分粒子经过磁场偏转后垂直 MN 回到 O 点.求:垂直 MN 回到 O 点的粒子速度的最大值.

分析:由于三角形区域内外磁感应强度均为 B ,洛伦兹力提供粒子做圆周运动的向心力,粒子在磁场中的运动半径保持不变,为 $R = \frac{mv}{qB}$,在磁场中做

完整圆周运动的周期为 $T_0 = \frac{2\pi m}{qB}$.题干中要求的是

垂直 MN 回到 O 点粒子速度的最大值,即满足:(1)粒子速度最大,即要求粒子的运动半径最大;(2)垂直入射回到 O 点,粒子运动满足对称性要求.本文根据带电粒子首次运动到 PN 边界时圆心角 θ 是否为特殊角,将运动分成常规和非常规偏转两部分讨论.

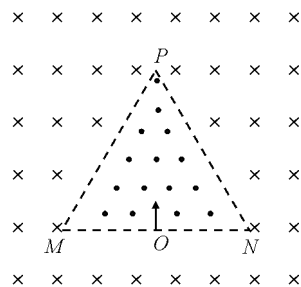


图1 例题题图

2 粒子的常规偏转情况

本节讨论 θ 为 60° 、 120° 、 240° 、 300° 的粒子常规偏转情况.

(1) $\theta = 60^\circ$

当 $\theta = 60^\circ$ 时,粒子可能的偏转轨迹如图2所示.粒子运动半径 R 满足

$$\frac{1}{2}a = 4nR + R$$

该粒子可以垂直回到 O 点.运动半径为

$$R = \frac{1}{2(4n+1)}a \quad (n=0,1,2,\dots)$$

粒子的初射速度为

$$v = \frac{1}{2(4n+1)} \frac{qBa}{m}$$

粒子在磁场中的偏转总时间

$$t = \frac{7}{6} T_0 + 6n T_0$$

轨迹与磁场边界的交点个数均为 $4n+1$, 粒子共有 $12n+3$ 次偏转.

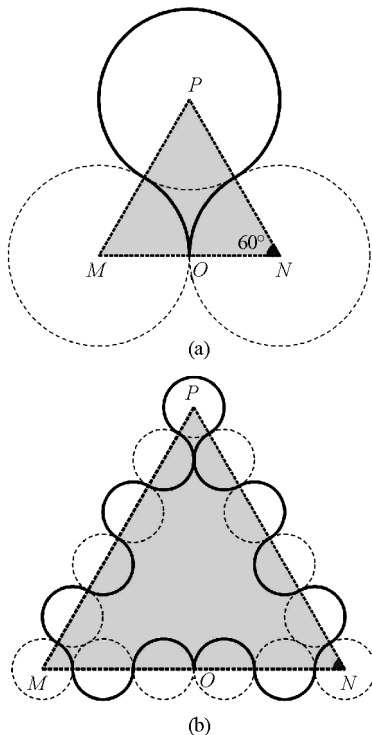


图2 偏转圆心角为 60° 时粒子的3次和15次偏转轨迹示意图

(2) $\theta = 120^\circ$

当 $\theta = 120^\circ$ 时, 粒子可能的偏转轨迹如图3所示.

如图3(a)所示, 粒子共有5次偏转, 轨迹与磁场底边交点个数为1(不计回到O点), 与侧边的交点个数为2. 如图3(b)所示, 粒子共有25次偏转, 轨迹与磁场底边交点个数为5, 与侧边的交点个数为10.

粒子运动半径 R 满足

$$\frac{1}{2}a = 4nR + 2R$$

该粒子可以垂直回到O点, 运动半径为

$$R = \frac{1}{2(4n+2)}a \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

粒子的初射速度为

$$v = \frac{1}{2(4n+2)} \frac{qBa}{m}$$

粒子在磁场中的偏转总时间

$$t = \frac{17}{6} T_0 + \frac{46}{3}n T_0$$

粒子轨迹与三角形区域底边有 $4n+1$ 个交点, 与侧边的各有 $2(4n+1)$ 个交点, 共 $5(4n+1)$ 次偏转.

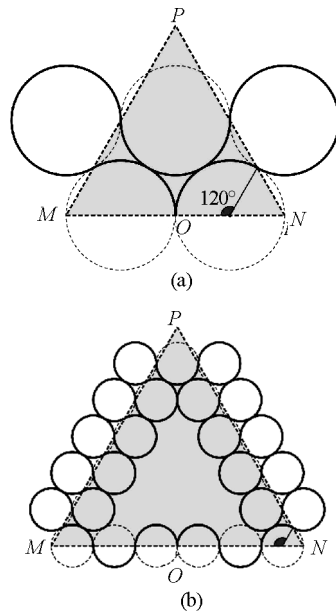


图3 偏转圆心角为 120° 时粒子的5次和25次偏转轨迹示意图

(3) $\theta = 240^\circ$

当 $\theta = 240^\circ$ 时, 粒子的轨迹刚好能经过三角形区域底边 M, N , 如图4所示.

粒子运动半径 R 满足

$$\frac{1}{2}a = 4nR + 4R$$

该粒子可以回到O点, 运动半径为

$$R = \frac{1}{2(4n+4)}a \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

则粒子的初射速度为

$$v = \frac{1}{8(n+1)} \frac{qBa}{m}$$

粒子在磁场中的偏转总时间

$$t = \frac{13}{2} T_0 + \frac{14}{3}n T_0$$

共 $(20n+21)$ 次偏转.

值得注意的是, 当带电粒子通过三角形顶点 P 时, 粒子的运动轨迹比较复杂. 以粒子运动半径 $R = \frac{a}{8}$ 为例, 图4(a)给出粒子21次的偏转轨迹示意图, 图4(b)给出了带电粒子在顶角 P 处的偏转顺序.

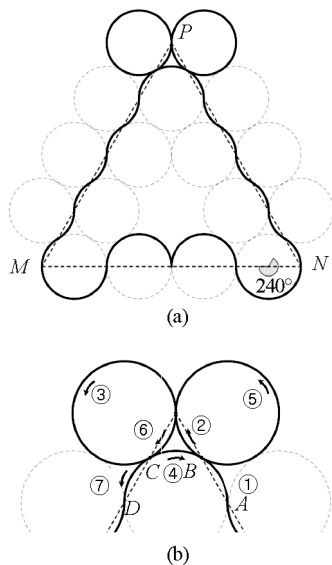


图4 偏转圆心角为 240° 时粒子的21次偏转轨迹示意图

(4) $\theta = 300^\circ$

当 $\theta = 300^\circ$ 时, 粒子可能的偏转轨迹如图5所示.

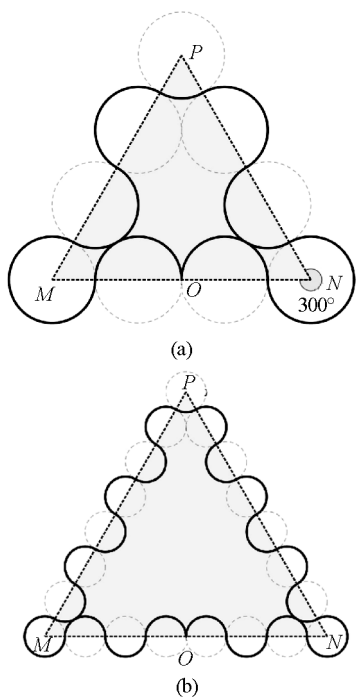


图5 偏转圆心角为 300° 时粒子的9次、21次偏转轨迹示意图

粒子运动半径 R 满足

$$\frac{1}{2}a = 4nR + 3R$$

粒子可以垂直回到 O 点, 此时粒子运动半径为

$$R = \frac{1}{2(4n+3)}a \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

则粒子的初射速度为

$$v = \frac{1}{8(n+3)} \frac{qBa}{m}$$

粒子在磁场中的偏转总时间

$$t = \frac{29}{6} T_0 + 6n T_0$$

粒子与三边的交点数均为 $(4n+3)$, 共 $3(4n+3)$ 次偏转.

综上所述, 当粒子运动半径满足

$$R = \frac{a}{2n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

即三角形区域边长 a 与粒子运动半径 R 的比值为偶数倍时, 带电粒子经过若干次偏转后总能垂直回到 O 点, 但运动轨迹有所不同.

当 $n=1$ 时, 粒子运动半径 $R_0 = \frac{a}{2}$ 最大且经过3

次偏转后能垂直回到 O 点, 出射速度为 $v_0 = \frac{qBa}{2m}$. 本文在此提出疑问: 该速度是否为粒子能够垂直回到 O 点的最大速度呢? 下面对该问题进行研究.

3 粒子的非常规偏转情况

本节首先分析带电粒子在磁场区域中5次偏转的其他情况, 再构建模型, 将该模型拓展到更多次偏转, 考虑到偏转圆心角均不是特殊角度, 因此称为非常规偏转.

(1) 5次偏转情况分析

除了图3(a)给出粒子在磁场区域偏转5次的情况外, 图6给出带电粒子偏转5次的其他情况.

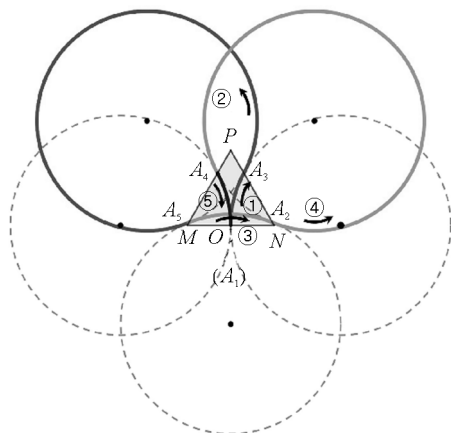


图6 带电粒子经过5次偏转回到 O 点的非常规偏转

图6中, 带电粒子从 $A_1(O)$ 点出发, 经过①轨迹首次到达 PN 边 A_3 点, 而后沿着②的轨迹到达

PM 边的 A_5 , 再经过 ③ 轨迹到达 A_2 , 再经过 ④ 轨迹到达 A_4 , 最后经过 ⑤ 轨迹垂直回到 A_1 点. 粒子偏转轨迹与磁场侧边的交点数均为 2, 与底边交点数为 1. 粒子的偏转轨迹依次通过 $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_5 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_1$.

假定正三角形区域边长 $a = 1$, 通过 Geogebra 绘制图像, θ 为 28.377° , 粒子的运动半径 $R \approx 1.267$, 即该情况下带电粒子能垂直回到 O 点且粒子偏转半径 R 大于 3 次偏转时的运动半径 R_0 , 此时粒子的出射速度大于 v_0 .

(2) 模型构建

带电粒子与三角形区域发生 n 次偏转 (n 为奇数), 偏转轨迹与磁场区域的交点数记为: $s - b - s$, s 表示轨迹与邻边交点个数, b 表示轨迹与底边交点个数 (不计粒子最后垂直回到 O 点), 满足 $2s + b = n$.

逆时针方向将各交点标记为 A_1, A_2, \dots, A_n . 粒子偏转轨迹经过磁场边界的交点有以下情况: 1) 依次经过, 偏转轨迹以 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_1$ 运动; 2) 间隔一个交点经过, 偏转轨迹以 $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_1$ 运动; 3) 间隔两个交点经过, 轨迹以 $A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-2} \rightarrow A_1$ 运动等, 考虑到带电粒子首次偏转不可能通过三角形边界顶点 P , 最后一条偏转轨迹为 $A_1 \rightarrow A_{\frac{n+1}{2}} \rightarrow \dots \rightarrow A_1$, 共有 $\frac{n-1}{2}$ 种可能的偏转轨迹.

以 5 次偏转为例 ($n = 5$), 底边交点个数 b 为 1 或 3, 则偏转轨迹交点有两种可能的类型: $2 - 1 - 2$ 和 $1 - 3 - 1$. 对于 $1 - 3 - 1$ 型, 由于粒子在三角形区域内的运动半径相同, 当粒子在底边有 3 次交替穿越时, 不可能在两邻边只穿过 1 次, 因此 $1 - 3 - 1$ 类型的偏转轨迹不存在. 有以下推论: 轨迹与磁场邻边、底边交点个数差不大于 2, 即有 $|b - s| \leq 1$. 对于 $2 - 1 - 2$ 类型, 粒子以以下两种方式偏转:

1) $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_1$, 如图 2(a) 所示, θ 为 120° , 为常规偏转.

2) $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_5 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_1$, 如图 6 所示, θ 为 28.377° , 为非常规偏转.

(3) 多次非常规偏转讨论

带电粒子在三角形区域内经过 7 次非常规偏

转情况为 $2 - 3 - 2$ 型, 即与底边有 3 个交点, 与邻边各有 2 个交点, 粒子轨迹与磁场区域 3 边交点的共有 3 种可能情况: 1) $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6 \rightarrow A_7 \rightarrow A_1$, 粒子无法以该路径运动; 2) $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_5 \rightarrow A_7 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6 \rightarrow A_1$, 如图 7(a) 所示, 粒子运动半径 $R \approx 0.407, \theta \approx 71.459^\circ$; 3) $A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7 \rightarrow A_3 \rightarrow A_6 \rightarrow A_2 \rightarrow A_5 \rightarrow A_1$, 如图 7(b) 所示, 粒子运动半径 $R \approx 1.622$, 为 7 次偏转的最大半径, $\theta \approx 23.197^\circ$, 此时粒子的出射速度大于 v_0 .

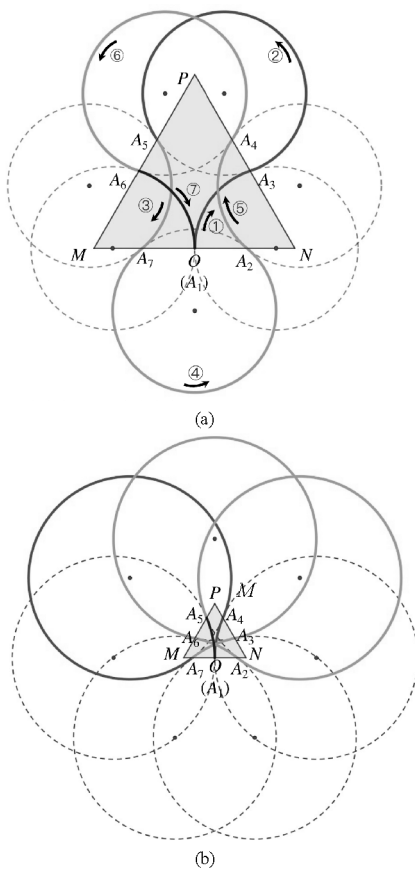


图 7 带电粒子经过 7 次偏转的非常规偏转轨迹

带电粒子 9 次非常规偏转情况为 $3 - 3 - 3$ 型, 粒子偏转共有 4 种可能情况:

1) $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6 \rightarrow A_7 \rightarrow A_8 \rightarrow A_9 \rightarrow A_1$, 粒子的运动半径 $R = \frac{a}{6}, \theta = 300^\circ$, 如图 5(a) 所示, 为常规偏转;

2) $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_5 \rightarrow A_7 \rightarrow A_9 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6 \rightarrow A_8 \rightarrow A_1$, 粒子的偏转轨迹如图 8(a) 所示, 粒子运动半径 $R \approx 0.275, \theta = 105.184^\circ$;

3) $A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_7 \rightarrow A_1$, 该情况恰好变成 3 次偏

转情况, $\theta = 60^\circ$, 如图 2(a) 所示, 为常规偏转;

4) $A_1 \rightarrow A_5 \rightarrow A_9 \rightarrow A_4 \rightarrow A_8 \rightarrow A_3 \rightarrow A_7 \rightarrow A_2 \rightarrow A_6 \rightarrow A_1$, 粒子的偏转轨迹如图 8(b) 所示, 粒子的运动半径 $R = 2.049$, $\theta = 19.107^\circ$, 为 9 次偏转的最大运动半径.

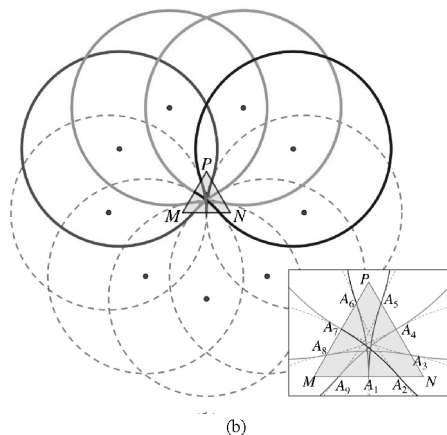
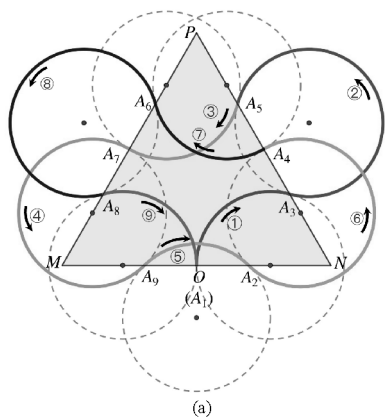


图 8 带电粒子经过 9 次偏转的非常规偏转轨迹

当带电粒子在三角形区域内外发生 11、13、15 次非常规偏转时, 偏转路径、偏转半径和偏转圆心角如表 1 所示.

表 1 带电粒子在磁场中 11、13、15 次非常规偏转参数

偏转类型	11 次偏转 (4-3-4 型)	13 次偏转 (4-5-4 型)	15 次偏转 (5-5-5 型)
偏转交点 (示意图)			
偏转路径 1 半径 1、偏转圆心角 1	$A_1 \rightarrow A_5 \rightarrow A_9 \rightarrow A_2 \rightarrow A_6 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_3 \rightarrow A_7 \rightarrow A_{11} \rightarrow A_4 \rightarrow A_8 \rightarrow A_1$	$A_1 \rightarrow A_5 \rightarrow A_9 \rightarrow A_{13} \rightarrow A_4 \rightarrow A_8 \rightarrow A_{12} \rightarrow A_3 \rightarrow A_7 \rightarrow A_{11} \rightarrow A_2 \rightarrow A_6 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_1$	$A_1 \rightarrow A_5 \rightarrow A_9 \rightarrow A_{13} \rightarrow A_2 \rightarrow A_6 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_{14} \rightarrow A_3 \rightarrow A_7 \rightarrow A_{11} \rightarrow A_{15} \rightarrow A_4 \rightarrow A_8 \rightarrow A_{12} \rightarrow A_1$
	$R \approx 0.949, \theta \approx 35.804^\circ$	$R \approx 0.459, \theta \approx 64.403^\circ$	$R \approx 0.363, \theta \approx 79.105^\circ$
偏转路径 2 半径 2、偏转圆心角 2	$A_1 \rightarrow A_6 \rightarrow A_{11} \rightarrow A_5 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_4 \rightarrow A_9 \rightarrow A_3 \rightarrow A_8 \rightarrow A_2 \rightarrow A_7 \rightarrow A_1$	$A_1 \rightarrow A_6 \rightarrow A_{11} \rightarrow A_3 \rightarrow A_8 \rightarrow A_{13} \rightarrow A_5 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_2 \rightarrow A_7 \rightarrow A_{12} \rightarrow A_4 \rightarrow A_9 \rightarrow A_1$	$A_1 \rightarrow A_8 \rightarrow A_{15} \rightarrow A_7 \rightarrow A_{14} \rightarrow A_6 \rightarrow A_{13} \rightarrow A_5 \rightarrow A_{12} \rightarrow A_4 \rightarrow A_{11} \rightarrow A_3 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_2 \rightarrow A_9 \rightarrow A_1$
	$R \approx 2.650, \theta \approx 15.363^\circ$	$R \approx 1.090, \theta \approx 32.022^\circ$	$R \approx 3.522, \theta \approx 12.005^\circ$
偏转路径 3 半径 3、偏转圆心角 3		$A_1 \rightarrow A_7 \rightarrow A_{13} \rightarrow A_6 \rightarrow A_{12} \rightarrow A_5 \rightarrow A_{11} \rightarrow A_4 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_3 \rightarrow A_9 \rightarrow A_2 \rightarrow A_8 \rightarrow A_1$	
		$R \approx 3.086, \theta \approx 13.472^\circ$	

从表 1 可知, 粒子在磁场中发生 11 和 15 次非常规偏转的路径均有 2 条, 发生 13 次非常规偏转的路径有 3 条. 不难归纳: 当带电粒子从 A_1 处开始运动, 首次到达 PN 边界的第 $A_{\frac{n+1}{2}}$ 位置, 该运动半径是 n

次可能偏转情况中最大的, 且粒子能垂直回到 O 点. 粒子 3 次偏转半径 $R = \frac{a}{2}$ 是粒子常规偏转的最大半径, 但不是满足本题要求的最大半径.



限制回旋加速器中粒子最大能量的几个因素

李志强 龚 晖

(华中师范大学第一附属中学 湖北 武汉 430223)

(收稿日期:2023-02-07)

摘要:从回旋加速器的基本原理出发,分析了限制粒子最大能量的几个因素,即D形盒半径和磁感应强度大小、加速极板之间的间距和加速电压、狭义相对论效应导致的粒子质量变化,并通过实际加速器的数据,分析和比较了在这几个因素独立影响下,粒子最大能量的数量级.

关键词:回旋加速器;最大能量;限制

1 回旋加速器最大能量的限制因素

回旋加速器的出现是加速器发展史上的重要里程碑,它使得人类不仅创造了当时人工加速带电粒子的能量记录,更重要的是它所展示的回旋共振加速方式奠定了人们研发各种高能粒子加速器的基础.

最早的回旋加速器虽然已经突破了当时加速带电粒子的能量记录,但其最大能量依然受到几方面因素的限制,后来人们为了突破这些限制而在其基础上做出了许多改进.下面分别列举和分析这几方面的限制.

1.1 限制因素 1: D形盒半径和磁感应强度大小

这是最容易理解的一类限制,也是高中物理教

学中常用的命题点.如图1和图2所示,设被加速粒子的质量为 m ,带电荷量为 $+q$,加速电压周期 $T = \frac{2\pi m}{Bq}$,匀强磁场的磁感应强度大小为 B ,D形盒半径为 R .不计粒子经过加速极板间隙的时间,忽略相对论效应导致的质量变化,则粒子总能与加速电压同步.当其在磁场中旋转半径达到D形盒半径 R 时,不能再被加速.

此时有

$$Bvq = \frac{mv^2}{R}$$

粒子动能

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

解得粒子最大动能

4 结论

本文根据带电粒子首次偏转到 PN 边界的圆心角是否为特殊角,将偏转轨迹分成常规和非常规两类,对粒子的非常规偏转进行建模并归纳总结;若正三角形内外分布着两个方向相反但磁感应强度相同的匀强磁场,当带电粒子从正三角形底边垂直出射时,不存在能垂直回到原点的最大粒子速度.

本题模型符合命题设计要求,具有创新性,切入

角度新颖,能够很好地考查学生的思维和学科素养.但在命制三角磁场内外偏转问题时,需要对带电粒子可能的运动轨迹有所明晰,以确保命题准确和严谨性.对该问题的研究也为教师开展教学研究和思考提供一定的借鉴.

参考文献

- [1] 郑行军. 利用对称性巧解三角形磁场周期性回归问题[J]. 中学物理教学参考, 2016(1): 23-24.
 [2] 陈燕, 罗志恒. 带电粒子在有界匀强磁场中运动的动态问题分析[J]. 物理教师, 2022(8): 83-86.