浅谈安培环路定理的使用*

刘永录　张　森　邹德滨

（国防科技大学理学院　湖南 长沙　410073）

（收稿日期：2023 - 02 - 09）

摘　要：通过应用安培环路定理求解了有限长载流直导线的磁感应强度，说明了“有限长度”的数学条件和物理背景. 从麦克斯韦方程的积分形式和微分形式，讨论了安培环路定理的使用场景，阐明了非对称电流密度分布情况下求解稳恒磁场的基本思想 —— 边界条件确定磁场，并拓展至应用高斯定理求解非对称电荷密度分布静电场问题.

关键词：安培环路定理；麦克斯韦方程组；稳恒磁场；边界条件

1　引言

在大学物理[1-3] 和普通物理[4] 的课程教学中，电磁学理论是学生普遍反映较难学习的内容. 原因在于，从力学过渡到电磁学，有两个比较重要的改变. 一是研究对象的改变，力学主要研究宏观低速的机械运动，涉及物体空间位置随时间的演化规律，主导其变化的是相互作用（或者称为力）；而电磁学研究的是电场和磁场在空间的分布及其演化，主导其演化的是电荷和电流的分布，电磁学中的相互作用表现为带电粒子与场的相互作用，主要表现为洛伦兹力. 二是矢量场的研究与力学中不一样，微分性质包括了散度和旋度. 电磁学的研究对象是电场和磁场这两个矢量场，矢量场的变化包含随时间的演化及空间分布的变化，最终以麦克斯韦方程组为高度总结，刻画了电磁场的变化与电荷、电流分布的关系.

麦克斯韦方程组是电磁学的基本方程，是集电磁学之大成的理论. 不但揭示了电磁现象的基本规律，而且将场的概念引入物理，为后续的发展提供了重要的理论支撑. 麦克斯韦方程组有积分和微分两种典型形式，分别从宏观和微观角度刻画了矢量场研究过程中对其描述的不同侧面，是现象学研究和还原论研究两种思维方式的典型体现，对其理解是经典电磁学的主要任务之一.

高斯定理和安培环路定理是描述电荷激发电场、电流激发磁场的两个重要方程，对应麦克斯韦方程组中的两个有源方程. 对于高斯定理和安培环路定理[5-9]，大部分学生仅仅停留在应用层面，对其背后的物理内涵挖掘不是很充分.

本文从一个常见的例子出发，通过使用安培环路定理来阐述电磁场的微分形式和积分形式及其背后的意义，加深学生对麦克斯韦方程组及电磁场概念的理解.

2　应用安培环路定理求解有限长载流直导线的磁感应强度

使用高斯定理求解电场强度的过程中，对于电荷对称分布的场强，应用范围比较广. 但是在使用安培环路定理求磁感应强度的过程中，应用受到了较

* 教育部高等学校教学研究立项项目“大学物理线上线下混合式教学模式改革与实践”，项目编号：DJZW202032zn；国防科技大学教改课题“在线教学质量评价改革与实践”，课题编号：U2020004；国防科技大学文理学院重点课题“《大学物理》数值仿真辅助教学研究与案例库建设”；教育部高等学校教学研究立项项目“基于科学计算辅助的《大学物理》教学模式探索与数值仿真案例库建设”项目编号：DWJZW202236zn；国防科技大学研究生课程思政第二批重点建设项目《高等电动力学》.

作者简介：刘永录（1978 -　），男，博士，教授，主要从事粒子物理相关研究.

大的限制，大部分教科书上[1-4] 对这个问题仅限于几个特例：无限长载流直导线，无限长载流螺线管和环形载流螺线管，而对于如何利用安培环路定理求解“有限长度”载流直导线所激发的磁场等类似问题却鲜有提及．下面通过求解有限长载流直导线的磁感应强度来分析该问题的物理和数学背景．

【例题】如图 1 所示，设有限长载流直导线通以电流 I，其长度为 l，求距离导线为 a 处的磁感应强度．

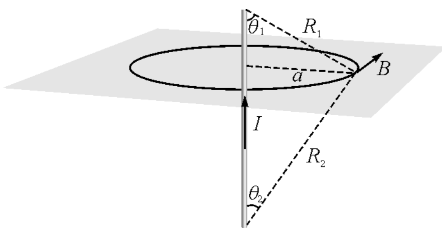

图 1　有限长载流直导线磁感应强度示意图

解析：这个问题是大学物理或普通物理电磁学中用毕奥-萨伐尔定律求解的典型问题，参照教材[1]结果，我们首先给出其结论如下

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \tag{1}$$

下面通过安培环路定理来求解该磁场．由对称性分析可知，在垂直于载流直导线的平面内，以导线为圆心、以 a 为半径的圆上磁感应强度 B 沿切线方向且大小相等，应用安培环路定理有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I \tag{2}$$

其中回路积分 L 沿圆周方向，I 为穿过回路所围曲面的电流强度．在计算中，由磁感应强度的角向对称性易知，环路积分部分和无限长载流直导线的情况相同，即

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi a \tag{3}$$

但是 B 和无限长载流直导线的结果真的一致吗？直观估算：有限长导线以外的部分肯对会对 a 处的磁感应强度有贡献，两种情况下计算的磁感应强度肯定不同．那么如何正确解决这一矛盾呢？关键是在考虑“穿过闭合曲线”的电流强度时，需谨慎对待．由于载流直导线不是无限长，在端点处电流的流向会影响到积分结果．假设在端点处电流完全自由流动，即电流密度矢量是球对称的．对于导线的上端点来说，电流球对称流出，如图 2 所示．

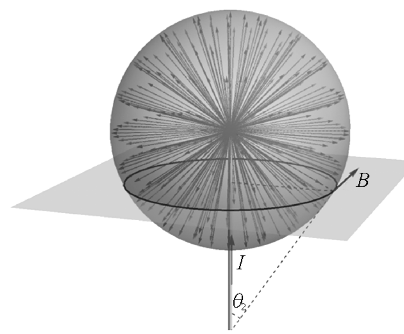

图 2　有限长载流直导线的上端点电流自由流动示意图

此时必然有部分电流从闭合曲线所围成的圆面流回，大小为电流密度矢量对环路所张曲面的通量．这里，载流导线外的电流实际为“位移电流”，包含从导线端点流出的电流和从闭合曲线所围成的圆面流回的电流．将电流密度矢量在球冠上进行积分，可得到上端点的电流穿过圆面的电流强度为

$$I_1=\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{I}{4\pi R_1^2}\cdot 2\pi R_1^2(1-\cos\theta_1) \tag{4}$$

该电流穿过方向与电流强度 I 的方向相反．同理，可以得到下端点的电流穿过圆面的电流强度为

$$I_2=\frac{I}{4\pi R_2^2}\cdot 2\pi R_2^2(1-\cos\theta_2) \tag{5}$$

且穿过的方向也与 I 的方向相反．这样，在导线上端积聚正电荷，而同时在导线下端积聚等量的负电荷，二者分别发出和聚集电场线，则回路内包围的位移电流在任意时刻都与导线中传导电流反向．将所有穿过圆面的电流叠加并应用安培环路定理，得到

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi a=\mu_0(I-I_1-I_2)=$$
$$\frac{\mu_0 I}{2}[2-(1-\cos\theta_1)-(1-\cos\theta_2)]=$$
$$\frac{\mu_0 I}{2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \tag{6}$$

即

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \tag{7}$$

此结果与前面毕奥-萨伐尔定律求解的结果完全一致．

需要提到的是，针对安培环路定理对于一段有限长稳恒电流的磁场是否严格成立的问题，已有学者进行了讨论[10-11]，而本文通过上述分析得到了严

格的证明. 此外,以上方法可以拓展至利用安培环路定理计算具有对称性电流分布的复杂磁场强度的问题,如电流流入大地后呈半球状均匀散开时大地内磁场强度的计算. 基于毕奥-萨伐尔定律的磁场叠加法很难计算,但利用以上推广的安培环路定理则容易计算得到.

3　浅谈安培环路定理求解磁感应强度的使用场景

安培环路定理是描述稳恒磁场横场性质的积分形式,表明磁感应强度的闭合回路积分由穿过该闭合回路的电流强度决定. 不过相比于高斯定理,这里所说的“穿过闭合回路”实际上指的是穿过闭合回路所张成的曲面. 因此安培环路定理在实际使用中存在一定的不确定性,即选择的曲面需和实际情况一致.

从物理上看,这涉及闭合回路及其张成的曲面的边界确定问题,而实际上的电流强度总是有限的(在有限区域内构成闭合回路,或者从无穷远处出发终止于无穷远),因此有限长载流直导线模型依赖于具体实例. 基于以上讨论,我们得到两个基本结论:

(1) 利用毕奥-萨伐尔定律计算有限长度载流直导线的磁感应强度时,实际上使用的潜在条件是载流直导线两端是完全开放的;如果有限长载流直导线的一端接地,这时得到的就是半无限长载流直导线的磁感应强度分布;而当有限长载流直导线两端都接地时,则等效为无限长载流直导线的磁场情况.

为了更加形象地展示上述结论,我们将采用 Mathematica 软件针对两端自由、上端自由下端接地和两端接地这 3 种不同情况下电流激发磁场的分布进行数值仿真. 图 3 给出了电流产生的磁感应强度 B 的二维截面图. 图中间的白色粗箭头表示一段长 l 为 0.5 m、电流 I 为 1 A 的有限长载流直导线,四周的细箭头表示载流直导线两端的电流分布,即电流密度. 从图中看出,对于有限长度的载流直导线,如果两端是完全开放的,两端电流密度矢量呈球状对称分布,这等价于利用毕奥-萨伐尔定律计算的有限长载流直导线的磁感应强度,如图 3(a);若有限长载流直导线的一端接地,则自由端电流密度矢量呈球状对称分布,接地端电流密度矢量呈半球面对称分布,对应于半无限长载流直导线的磁感应强度分布结果,如图 3(b);当有限长载流直导线两端同时接地时,两端电流密度矢量均呈半球面对称分布,则载流直导线周围的磁感应强度等效为无限长载流直导线情形,如图 3(c).

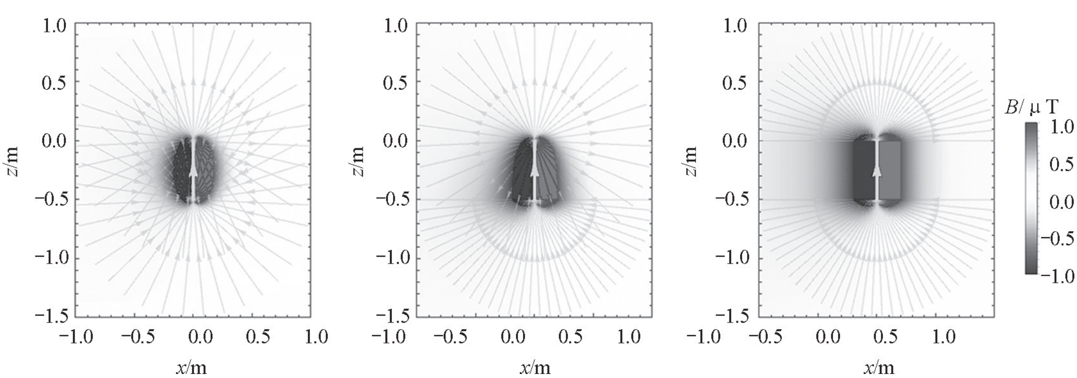

图 3　两端自由(a)、上端自由下端接地(b) 和两端接地(c) 情形下,电流、磁感强度二维截面图(参数:$I=1$ A,$l=0.5$ m;$B>1$ μT 的饱和区间用浅色表示,$B<-1$ μT 的饱和区间用深色表示)

(2) 安培环路定理描述的内容是严格的,无论电流分布是否对称,绕某一闭合回路的磁感应强度的线积分取决于穿过该回路的电流强度. 对该问题的进一步理解需要考查微分形式的麦克斯韦方程组. 微分形式的麦克斯韦方程是从积分形式导出的,为简单起见仅考虑稳恒情况. 利用电流密度矢量,安培环路定理写成

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8}$$

利用斯托克斯定理,上式变为

$$\int_S(\nabla\times \boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9}$$

注意到等式两边积分变量和积分区域相同,且对于

任意积分区域均满足,故可得到

$$\nabla\times \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{10}$$

该式说明,电流密度矢量决定了磁感应强度的旋度.需要注意的是,等式两边的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 是同一时空点的,电流密度矢量决定了该点处的磁感应强度的旋度而不是磁感应强度本身,这才是对“电流是磁场的源”这一说法更准确的认识.这个概念在大学物理中也是个常见的概念,比如在讲导体表面的电场强度时,如何理解某点的电场强度由该点处的电荷密度决定与该点处的场强由空间所有点处的电荷的叠加决定这一看似矛盾的表述.值得一提的是,也有学者[12]将有限长电流的自由端假定为电荷量不断增加或减少的点电荷,利用构造等价位移电流$\dfrac{\partial D}{\partial t}$给出同样结论.

由以上讨论可知,安培环路定理的积分形式和微分形式在描述物理内容上是等价的,但其侧重点又有所不同.积分形式给出了宏观效果,而微分形式给出了局域点的细微刻画,这和牛顿第二定律与动量定理的关系类似.定性地讲,二者的数学描述是不同的,但是本质是一样的.从数学的角度,微分形式给出场的解,解方程时需给定边界条件.积分形式的安培环路定理之所以能确定就在于给定了电流密度矢量在端点(边界)处的值,本质上等价于给定边界条件来确定磁场的.总的说来,求解稳恒磁场的基本思想就是边界条件确定磁场.

4 关于高斯定理求解非对称电荷密度分布静电场的问题

我们还可将边界条件确定磁场的思想推广到静电场的讨论.在应用高斯定理时,对于对称分布的电荷或者电荷密度,应用积分形式的高斯定理求解电场强度矢量.对于非对称分布的情况,不能直接应用该方法求解,但是高斯定理告诉我们,闭合曲面上电场强度的面积分(通量)由内部的电荷总量决定,即

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11}$$

同样的讨论,等式右边写成积分形式为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{12}$$

再对左边使用高斯积分公式,得到

$$\int_V \nabla\cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{13}$$

等式两边积分区域和积分变量处处相等,因此有

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{14}$$

这就是微分形式的高斯定理,也是真空中麦克斯韦方程组关于电场强度散度的内容.该结果同样告诉我们,真空中某点处的电荷密度决定的是该点电场强度的散度,而电场强度本身是由空间所有电荷决定.

5 总结

本文从应用安培环路定理求解有限长载流直导线的磁感应强度这一典型问题出发,揭示了边界条件对于非对称电流密度分布情况下求解稳恒磁场的重要性,明确了安培环路定理积分形式和微分形式的使用场景,并拓展至应用高斯定理求解非对称电荷密度分布静电场的问题.以上讨论有助于学生加深对麦克斯韦方程组积分形式和微分形式的理解,虽然两者所反映的物理内容相同,但积分形式给出的是一个区域场和源的整体联系,仅适用于介质连续分布、场量连续区域,而微分形式给出的是局域关系,适用于场量不连续情况.

参 考 文 献

[1] 李承祖,杨丽佳.大学物理学(上册)[M].北京:科学出版社,2009.

[2] 张晚云.大学物理教程(下册)[M].北京:高等教育出版社,2018.

[3] 张三慧.大学物理学(第三册)电磁学[M].北京:清华大学出版社,1991.

[4] 梁灿彬.普通物理学教程 电磁学[M].北京:高等教育出版社,2004.

[5] 张方方,公丕锋,尹新国.用安培环路定理计算磁感应强度[J].高师理科学刊,2014,34(1):50-51.

[6] 张明铎,莫润阳,张引红,等.安培环路定理的正确应用[J].物理通报,2016(9):50-52.

[7] 江军.关于大学物理中的“安培环路定理内容”教学的探讨[J].教育教学论坛,2017,1(4):221-222.

[8] 柴红,闵梦婷,向梅,等.磁场中安培环路定理绕行回路

(下转第 17 页)

Solution and Dispersion Relationship of One-dimensional Triatomic Chain in General

CHENG Hongxuan　HU Jianmin　WANG Yueyuan　NIU Li

(School of Physics and Electronic Engineering, Harbin Normal University, Harbin, Heilongjiang　150025)

Abstract: In this paper, the dispersion relation of one-dimensional three-atom chain in general is solved, and the influence of the coefficient of restoring force on the dispersion relation is discussed. The results show that, in general, the influence of different inter-atomic resilience coefficients of one-dimensional three-atom chain on the frequency of each lattice wave, spectrum width and frequency band gap width show different characteristics, and the fine adjustment of the frequency band gap width can be realized. The relevant research results of this paper are in-depth discussions on the basic theory of solid-state physics, which can provide theoretical guidance for the engineering design of bandpass filters.

Key words: solid state physics; one dimensional triatomic chain; dispersion relation; coefficient of resilience

(上接第 13 页)

的确定规则[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2017, 36(3): 44 - 48.

[9] 耿志浩. 一种安培环路定理的讲法[J]. 大学物理, 2021, 40(7): 17 - 18.

[10] 吴恒钦. 安培环路定理对于一段有限长稳恒电流的磁场成立吗? [J]. 工科物理, 1998, 8(4): 12 - 14.

[11] 胡锡奎, 李丽, 冯春宝, 等. 恒定磁场中安培环路定理的探讨[J]. 大学物理, 2021, 40(8): 20 - 22.

[12] 用安培环路定律计算有限长度的导线所产生磁场的问题以及解决办法[Z]. 知乎, 2019, https://zhuanlan.zhihu.com/p/63091143.

Brief Taking on the use of Ampere Circuital Theorem

LIU Yonglu　ZHANG Sen　ZOU Debin

(School of Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan　410073)

Abstract: By applying the Ampere circuital theorem on solving the magnetic strength excited by a current carrying straight conductor of finite length, the mathematical condition and physical background of finite length in Ampere circuital theorem is explained. From the integral form and differential form of Maxwell's equations, we discuss the usage scenario of Ampere circuital theorem and expound the basic idea to solve the problem relevant to steady magnetic field under asymmetric current density distribution, that is, the boundary conditions determine the magnetic field. Moreover, this idea has also been extended to the issue of the electrostatic field with asymmetric charge density.

Key words: Ampere circuital theorem; Maxwell equations; steady magnetic field; boundary condition