推导平行板电容器电容表达式的两种方法

赵曰峰

(大连市第八中学　辽宁 大连　116021)

(收稿日期:2023-03-15)

摘　要:通过构建物理模型,利用两种方法从理论上推导了平行板电容器的电容表达式 $C=\frac{\varepsilon_r S}{4\pi kd}$,过程简洁易懂.

关键词:平行板电容器;微元法;极限法;电容

人教版高中《物理》必修三第十章第 4 节“电容器的电容”在拓展学习环节通过实验探究的方式得出了真空中平行板电容器的电容表达式 $C=\frac{S}{4\pi kd}$ 以及介质中的电容表达式 $C=\frac{\varepsilon_r S}{4\pi kd}$,缺乏理论推导过程,导致许多学生对其推导过程充满疑惑和好奇,教师也难以用学生易懂的语言和物理知识[1-2]解释其推导过程.为帮助学生答疑解惑,充分理解平行板电容器的电容表达式,形成物理观念,培养科学思维和科学探究精神,也为解决教师教学上的困难,笔者通过两种方法推导了平行板电容器的电容表达式,过程简洁易懂,现将推导过程展示如下,与各位教师交流.

1　微元法

利用均匀带电平板的电场强度推导真空中平行板电容器电容表达式.

1.1　构建模型

构建带电半球壳模型计算无限大均匀带电平板产生的电场强度.

如图 1 所示,电荷面密度为 σ 的无限大带电平板产生的电场是匀强电场.

结论.我们既可以从安培力对时间的平均值运用动量定理求出导体棒位移,也可以从做功角度利用安培力对位移的平均值运用动能定理求出导体棒的位移.同时,还可以引导学生对比安培力对时间的平均值与对位移的平均值,搞清楚两者的区别,从而避免混淆.

4　结束语

我们对于物理现象应该从不同角度去分析,然后综合从不同角度分析得到的结论,将现象分立的各个方面、各个部分联系统一起来,形成一个有机的整体,这样才可以从一个更高、更全和更深刻的层面来认识物理现象和理解物理规律.

牛顿正是综合了伽利略、开普勒和笛卡尔等人的观点实现了物理学上的第一次大综合 —— 发现了万有引力定律;麦克斯韦在法拉第研究的基础上提出了电磁场理论,统一了电现象和磁现象,并预言了电磁波的存在;爱因斯坦在牛顿绝对时空观基础上提出了相对论,统一了时间、空间和物质,并得到牛顿运动定律只是相对论在低速、宏观下的近似;现在物理学家正在酝酿更大范围内的综合,即统一场论.

在教学过程中,教师应该坚持经常让学生经历分析与综合的科学思维过程,这样对学生科学思维的培养大有裨益,对提升学生发现问题、解决问题的能力大有裨益,对学生养成从不同角度辩证地看待问题的习惯,形成正确的人生观、价值观大有裨益.

参 考 文 献

[1] 叶建柱,蔡志凌.物理教学中的逻辑[M].北京:科学出版社,2013:47-53.

[2] 中华人民共和国教育部.普通高中物理课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020:4-5.

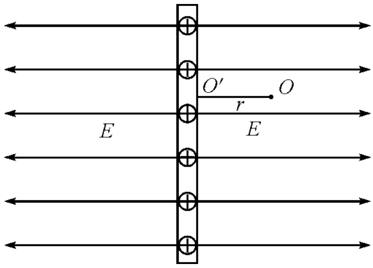

图 1　均匀带正电平行板产生的电场

对于距平板距离为 r 的 O 点，其距离板最近的点为 O'，对于 O 点电场强度可利用微元法求解. 选择关于 O' 对称的两个微小平面面元 $\mathrm{d}S_i$，如图 2 所示.

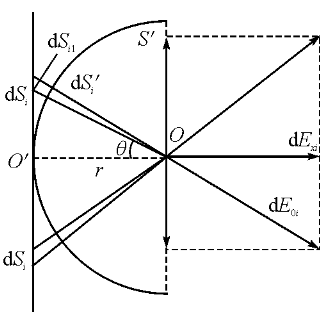

图 2　两对称带电面元 $\mathrm{d}S_i$ 在 O 点产生的电场强度

面元 $\mathrm{d}S_i$ 到 O 点距离为 $\dfrac{r}{\cos\theta}$，这一对带电面元在 O 点产生的电场强度为

$$\mathrm{d}E_i = 2\mathrm{d}E_{xi} = 2\cdot\frac{k\sigma\,\mathrm{d}S_i}{\left(\dfrac{r}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta =$$

$$2\cdot\frac{k\sigma}{r^2}\mathrm{d}S_i\cos^3\theta \tag{1}$$

以 O 点为球心，构建两个相同电荷面密度为 σ 的同心带电均匀球壳，借助球心角$\left(\text{球心角满足关系 } \alpha=\dfrac{S}{r^2}\text{，}S\text{ 为球面面积，}r\text{ 为球半径}\right)$计算式(1) 中的电场强度 $\mathrm{d}E_i$，图 2 中 $\mathrm{d}S_{i1}$ 和 $\mathrm{d}S_i'$ 是同一球心角 $\mathrm{d}\alpha_i$（$\mathrm{d}\alpha_i$ 为面元 $\mathrm{d}S_i$ 相对 O 点的立体角）下的两球壳面元，其中 $\mathrm{d}S_{i1}$ 是以 $\dfrac{r}{\cos\theta}$ 为半径构建的带电球壳面元，$\mathrm{d}S_i'$ 是以 r 为半径构建的带电球壳面元.

当球心角 $\mathrm{d}\alpha_i\to 0$ 时，球面面元 $\mathrm{d}S_{i1}$ 等于平面面元 $\mathrm{d}S_i\cos\theta$，所以式(1) 中 $\mathrm{d}S_i\cos^3\theta$ 变为

$$\mathrm{d}S_i\cos^3\theta = \mathrm{d}S_i\cos\theta\cos^2\theta = \mathrm{d}S_{i1}\cos^2\theta \tag{2}$$

由于 $\mathrm{d}S_{i1}$ 和 $\mathrm{d}S_i'$ 是同一球心角 $\mathrm{d}\alpha_i$ 下的两球壳面元，满足关系

$$\mathrm{d}\alpha_i = \frac{\mathrm{d}S_{i1}}{\left(\dfrac{r}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{\mathrm{d}S_i'}{r^2}$$

利用上式将式(2) 化为

$$\mathrm{d}S_i\cos^3\theta = \mathrm{d}S_{i1}\cos^2\theta =$$

$$\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)^2\mathrm{d}\alpha_i\cdot\cos^2\theta = r^2\mathrm{d}\alpha_i = \mathrm{d}S_i' \tag{3}$$

将式(3) 带入式(1) 可得

$$\mathrm{d}E_i = 2\cdot\frac{k\sigma}{r^2}\mathrm{d}S_i\cos^3\theta = 2\cdot\frac{k\sigma}{r^2}\mathrm{d}S_i' \tag{4}$$

其中 $\mathrm{d}S_i'$ 是以 r 为半径构建的球壳面元，与平面面元 $\mathrm{d}S_i$ 一一对应，所有面元 $\mathrm{d}S_i$ 均在半无限大带电平板内，与之对应的球壳面元 $\mathrm{d}S_i'$ 构成了以 O 为球心，r 为半径的 $\dfrac{1}{4}$ 带电球面.

因此由式(4) 可知，O 点的电场强度为

$$E_O = \sum_{i=0}^{n}\mathrm{d}E_i = \sum_{i=0}^{n}2\cdot\frac{k\sigma}{r^2}\mathrm{d}S'_i =$$

$$2\cdot\frac{k\sigma}{r^2}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{d}S_i' = 2\cdot\frac{k\sigma}{r^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\pi r^2 = 2k\pi\sigma \tag{5}$$

即无限大均匀带电平行板产生的电场强度为

$$E_O = 2k\pi\sigma$$

1.2　真空中平行板电容器电容表达式的推导

如图 3 所示，平行板电容器内部的电场可等效为两个相互平行的无限大平板内部产生的电场（这两个无限大平板带有相同电荷面密度为 σ 的等量异种电荷）.

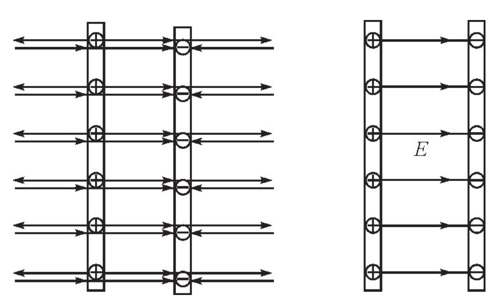

图 3　平行板电容器内部产生的电场

由式(5) 可得：

正极板产生的电场强度 $E_+ = 2\pi k\sigma$.

负极板产生的电场强度 $E_- = 2\pi k\sigma$.

平行板电容器内部任一点的电场强度等效为两个相互平行的无限大平板在该点产生的电场强度的叠加，即

$$E = E_+ + E_- = 2E_O = 4k\pi\sigma$$

因此电容器电压为

$$U = Ed = 4k\pi\sigma d \tag{6}$$

面积为 S 的平行板电容器的电荷量为

$$Q=\sigma S \tag{7}$$

将式(6)、(7) 带入电容的定义式，得出真空中平行板电容器的电容表达式为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma S}{4k\pi\sigma d}=\frac{S}{4k\pi d}$$

2　极限法

极限法构造等效平行板电容器推导真空中平行板电容器电容表达式.

在真空中构造两个电荷面密度相同带异种电荷的同心球壳(球壳厚度不计)，如图 4 所示，半径分别为 R_A、R_B(半径满足关系 $R_B-R_A=d$，d 为定值)，电荷量分别为 $+Q_A$、$-Q_B$. 在 A 球壳选取面元 S，同一球心角下 B 球壳对应的面元为 S'.

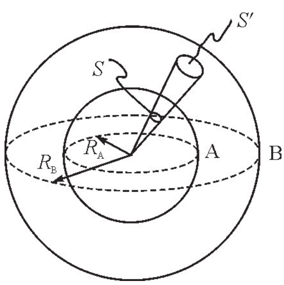

图 4　两个电荷面密度相同带异种电荷的同心球壳

由均匀带电球壳在壳内的任意位置产生的电场强度均为零可知，球壳间电场强度为球壳 A 产生的电场强度，因此 A、B 球壳间的电势由 A 球壳决定. 另外由于均匀带电球壳在球壳外某点产生的电场强度等效为位于球心处等量点电荷在该点产生的电场强度，即 A、B 球壳间的电势由位于球心处带电荷量为 $+Q_A$ 的点电荷决定，借助点电荷的电势公式可知，球壳 A 在壳外产生的电势为 $\varphi=\frac{kQ_A}{r}$，即 A 球壳处的电势为 $\varphi_A=\frac{kQ_A}{R_A}$，B 球壳处的电势为 $\varphi_B=\frac{kQ_A}{R_B}$.

所以 A、B 球壳间电势差为

$$U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=\frac{kQ_A}{R_A}-\frac{kQ_A}{R_B}=$$

$$\frac{kQ_A(R_B-R_A)}{R_AR_B}=\frac{kQ_Ad}{R_AR_B} \tag{8}$$

当 $R_A\to\infty$ 时，$R_A\gg d$，图 4 中球壳面元 S 和 S' 视为平行的平面面元，此时 $S\approx S'$. 由于两球壳电荷面密度相同，则两面元电荷量相同，因此两球壳面元等效为平行板电容器.

两球壳间的电势差 U_{AB} 即为构建的平行板电容器的电压，由式(8) 可知电压为

$$U=\frac{kQ_Ad}{R_AR_B}\approx\frac{kQ_Ad}{R_A^2}=4k\pi\sigma d \tag{9}$$

其中 $\sigma=\frac{Q_A}{4\pi R_A^2}$ 为两球壳的电荷面密度.

所构建的平行板电容器的电荷量为

$$Q=\sigma S \tag{10}$$

将式(9)、(10) 带入电容的定义式，得出真空中平行板电容器的电容表达式为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{S}{4\pi kd}$$

3　充满介质时平行板电容器电容表达式的推导

当真空中平行板电容器两极板间充满同一电介质时，会产生极化电荷，极化电荷形成的电场与两带电极板产生的电场相反，此时电容器间的电场强度会变小. 把没有介质时的电场强度 E 与放入介质时电场强度 E' 的比值定义为相对介电常数，用 ε_r 表示，即 $\varepsilon_r=\frac{E}{E'}$.

因此，充满介质的平行板电容器的电压为

$$U=E'd=\frac{E}{\varepsilon_r}d=\frac{4k\pi\sigma d}{\varepsilon_r} \tag{11}$$

面积为 S 的平行板电容器的电荷量为

$$Q=\sigma S \tag{12}$$

由式(11)、(12) 可得平行板电容器的电容表达式为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_r S}{4k\pi d}$$

推导完毕.

4　结束语

本文通过利用高中生易于理解的两种方式推导了平行板电容器的电容表达式，使学生明确了电容表达式的由来，深刻体会了构建模型是解决物理问题的一种高效手段，感受到物理模型的魅力，同时解决了教师教学中的困难. 推导过程利用微元法和极限法，合理外推，避免复杂的计算，通俗易懂，展示物理科学推理、科学论证的魅力，同时培养和拓宽了学生的科学思维能力，提升物理学科核心素养.

参 考 文 献

[1] 司德平. 平行板电容器电容决定式的半定量与定量推导探析[J]. 课程教学研究，2013(4)：59－60.

[2] 郑金. 探究各种电容器电容的推导及应用[J]. 物理教学，2016(9)：44－48.