圆电流在非均匀磁场中所受的安培力*

詹　琼　　张兴刚

（贵州大学物理学院　贵州 贵阳　550025）

（收稿日期：2023-03-21）

摘　要：给出了计算圆电流在非均匀磁场中所受的安培力的两种方法：换元积分法和复变函数法，对教师在教学中处理有关的积分问题以及培养学生的计算能力有一定指导意义．

关键词：圆电流；磁场；安培力

载流导线在磁场中受到的磁场力又称为安培力，用安培定律进行分析和计算，其数学表达式为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$. 当外磁场是均匀磁场时，求解过程相对简单一些；当外磁场不是均匀磁场时，求解这一类问题时有一定的难度．

下面就一个例题的求解进行分析研究．此题可见马文蔚等教师编写的《物理学》第七版第 295 页的例题 2. 一般来说，大学物理教师在讲安培力的计算时要么不用该例题，要么主要讲解其涉及的物理模型，对计算结果不会作仔细推导．然而，仍有部分学生关心题目的具体求解方法和步骤．

1　例题分析

【例题】载流导线间的磁场力．如图 1 所示，一无限长载流直导线与一半径为 R 的圆电流处于同一水平面内，它们的电流分别为 I_1 和 I_2，直导线与圆心相距为 d，且 $d>R$，求作用在圆电流上的磁场力．

解析：如图 1，建立坐标系 Oxy. 由题知电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所在处的磁感应强度方向垂直纸面向外，大小为

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+R\cos\theta)} \tag{1}$$

此电流元受到的安培力方向如图 1 所示，大小为

$$\mathrm{d}F=BI_2\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}l}{d+R\cos\theta} \tag{2}$$

式中

$$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$$

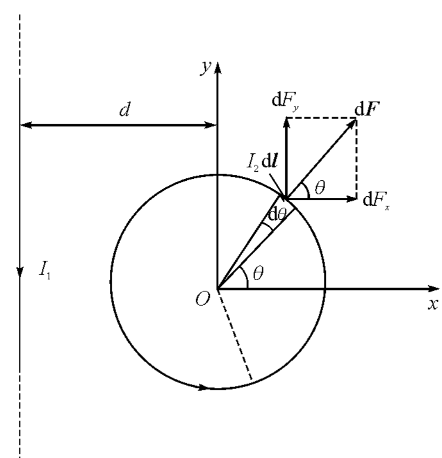

图 1　例题题图

对于圆电流上处于不同位置的电流元，其受到的安培力有不同的方向．因此需要考虑 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量，它们分别为

$$\mathrm{d}F_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{R\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}\cos\theta \tag{3}$$

$$\mathrm{d}F_y=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{R\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}\sin\theta \tag{4}$$

于是整个圆电流在 y 方向所受的安培力为

$$F_y=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}=$$

* 贵州省省级科技计划项目，项目编号：ZK2022148.

作者简介：詹琼（1980－　），女，硕士，高级实验师，主要从事大学物理及大学物理实验教学．

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-1}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\cos\theta=$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-1}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}(R\cos\theta+d)=$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln(d+R\cos\theta)\Big|_{2\pi}^{0}=0 \qquad (5)$$

$F_y=0$ 也可以通过对称性分析得到.

同理有

$$F_x=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}=$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\cos\theta}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{d}{d+R\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$\mu_0 I_1 I_2-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right) \qquad (6)$$

这里直接给出了

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi d}{\sqrt{d^2-R^2}}$$

这个积分比较困难. 我们给出了两种计算这个积分的方法.

1.1 方法一——换元积分法

令

$$t=\tan\frac{\theta}{2}$$

则有

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

由于 θ 的积分范围为 $[0,2\pi]$[1]，故 t 对应的积分范围为 $[0,\infty]$ 与 $[-\infty,0]$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{\infty}\frac{d}{d+R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t+$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{d}{d+R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{\infty}\frac{2d}{(d-R)t^2+(d+R)}\mathrm{d}t+$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2d}{(d-R)t^2+(d+R)}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2d}{d-R}\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+\dfrac{(d+R)}{(d-R)}}\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^2+\dfrac{(d+R)}{(d-R)}}\mathrm{d}t\right] \qquad (7)$$

利用积分公式

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

对上式进行积分得

$$I=\frac{2d}{\sqrt{d^2-R^2}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{\dfrac{d+R}{d-R}}}\Bigg|_0^{\infty}+\right.$$

$$\left.\arctan\frac{t}{\sqrt{\dfrac{d+R}{d-R}}}\Bigg|_{-\infty}^{0}\right]=$$

$$\frac{2d}{\sqrt{d^2-R^2}}\left\{\frac{\pi}{2}-0+\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}=$$

$$\frac{2\pi d}{\sqrt{d^2-R^2}} \qquad (8)$$

1.2 方法二——复变函数法

对于换元积分法，通过观察和验算，给出诸如 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的换元表达式是整个积分的关键步骤. 如果采用的换元表达式不合适，可能使得积分变得越来越复杂. 为了避免这个问题，可以利用复变函数的方法将式(6) 中的积分转化为围道积分，并且用留数定理对其进行计算. 另外，有些实积分中被积函数的原函数往往不能用初等函数的有限形式表示，因而不能用高等数学的积分方法来计算，而利用留数定理计算这些积分却是非常有效的.

留数定理[2]：设 C 为一条简单正向闭曲线，若 $f(z)$ 在 C 上连续，在 C 所包围的区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 外解析，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}[f(z),z_j] \qquad (9)$$

而对极点处的留数计算有：若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\cdot$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] \tag{10}$$

现在令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

由于 θ 的积分范围为 $[0,2\pi]$,恰好对应 z 沿圆周 $|z|=1$ 正向绕行一周,于是有

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{d}{d+R\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=$$

$$\frac{2d}{\mathrm{i}R}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+\dfrac{2d}{R}z+1}\mathrm{d}z \tag{11}$$

分母有两个根

$$z_1=\frac{-d+\sqrt{d^2-R^2}}{R}$$

$$z_2=\frac{-d-\sqrt{d^2-R^2}}{R}$$

为被积函数的奇点,其中 z_1 在 $|z|=1$ 内,于是有

$$I=\frac{2d}{\mathrm{i}R}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}[f(z),z_1]=$$

$$\frac{4\pi d}{R}\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=$$

$$\frac{4\pi d}{R}\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=$$

$$\frac{4\pi d}{R}\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=$$

$$\frac{4\pi d}{R}\frac{1}{(z_1-z_2)}=\frac{2\pi d}{\sqrt{d^2-R^2}} \tag{12}$$

2 讨论

通过前面的两种数学推导过程可以看到,对形如以下的积分

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

当被积函数的原函数很难看出或不能用初等函数的有限形式表示时,这时采用复变函数中的留数定理计算较为简单方便.而复变函数又是理工类专业常开设的一门课程,故在进行教学时适当进行一些引导,有利于培养学生学习的能力和兴趣.但当电流不是整个圆形,而是其中一部分圆弧时,换元积分法只需积分范围相应改变即可,而复变函数法就不能采用了.

参 考 文 献

[1] 范云正.对无限长载流直导线所在平面内圆电流受力的讨论[J].山东工业大学学报,2000(6):593-600.

[2] 赵建丛,黄文亮.复变函数与积分变换[M].3 版.上海:华东理工大学出版社,2021:86-88.

Ampere Force of a Circular Current in a Non-uniform Magnetic Field

ZHAN Qiong ZHANG Xinggang

(School of Physics,Guizhou University,Guiyang,Guizhou 550025)

Abstract:In this paper,we propose two methods,the integral method by substitution and the method by complex function,to calculate the ampere force for a circular current in a non-uniform magnetic field. It has certain guiding significance for teachers to deal with relevant integral problems in teaching and to cultivate students' computing ability.

Key words:circular current;magnetic field;Ampere force