关于高斯定理和面电荷处电场的探讨*

杨春艳

（玉溪师范学院物理与电子工程学院　云南 玉溪　653100）

（收稿日期：2023－04－06）

摘　要：对高斯定理进行推广，并用推广的高斯定理计算均匀带电球面上的电荷在球面处激发的静电场强和无限长均匀带电圆柱面上的电荷在柱面处激发的静电场强.

关键词：高斯定理；面电荷处；电场强度

一般电磁学教材[1-4] 在高斯定理的应用部分都有求均匀带电球面（薄球壳）、均匀带电圆柱面（薄圆筒）等典型的面带电体激发的静电场的例题或习题，但相关题目的分析和计算中鲜有提及面电荷处的电场强度，极个别教材[3] 中偶有提及，却存在分析不妥、易产生歧义的问题. 比如，场强空间不完整. 因为全空间除包含面内（$r<R$）、面外（$r>R$）区域外，还应包含面上（$r=R$）. 再如，对面电荷处（$r=R$）场强“仁者见仁智者见智”，一般有 4 种观点：

（1）$E=0$；

（2）$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$（均匀带电球面）、$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$（均匀带电圆柱面）；

（3）均匀带电球面在球面上的场强可以是 $\left[0,\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right]$ 中的任何值，同理均匀带电圆柱面在柱面上的场强可以是 $\left[0,\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right]$ 中的任何值；

（4）因面电荷处场强存在突变，故该处的场强无定义（没有值）[3].

可见，面电荷处电场强度的计算必须受到关注.

库仑定律法和高斯定理法是计算电场强度的两种方法，其中前者是普适方法，原则上能计算任何电荷分布激发的电场，但计算过程相对繁琐；当电场分布存在对称性时，高斯定理法因数学运算简单、快捷而受到学习者的青睐. 但在现行教材中的高斯定理 $\Phi=\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{(S内)}q_i$ 因不能用于计算面电荷处的电场强度，从而导致产生了上述问题. 本文探讨将高斯定理进行推广，使其能用来计算面电荷处的电场强度，并将计算过程和结果与用库仑定律法作比较.

1　高斯定理的推广

文献[5] 通过证明闭曲面对位于其上的任一点的立体角为 2π，推证出点电荷 q 在高斯面上时的高斯定理为[5]

$$\Phi=\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{2}$$

并将其推广到均匀带电球面的情形.

基于文献[5] 的工作，笔者认为可将现行电磁学教材、大学物理教材中的高斯定理推广为

$$\Phi=\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\sum_{(S内)}q_i+\frac{Q}{2}\right]\tag{1}$$

式中 Q 为高斯面上的电荷，$\sum\limits_{(S内)}q_i$ 为高斯面内电荷的代数和. 下面将用其计算均匀带电球面、均匀带电圆柱面这两种典型的面带电体表面处的电场强度，非面电荷处的场强计算不予赘述.

2　均匀带电球面球面处的电场强度

设电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球面上.

2.1　用库仑定律的计算

视均匀带电球面由无穷个共轴且半径连续变化的细环带组成. 如图 1 所示，P 为球面上任一点，其与球心 O 的连线为细环带的轴线. 任取一细环带，其对球心 O 点的位置矢量与轴线的夹角为 θ，宽度为

* 玉溪师范学院电磁学一流课程建设项目的阶段性成果.

作者简介：杨春艳（1979－　），女，硕士，副教授，主要从事电磁学、理论力学课程教学和光谱分析研究工作.

$R\mathrm{d}\theta$，带电荷

$$\mathrm{d}Q = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

其中
$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

为球面上电荷面密度.类比均匀带电圆环在其轴线上激发的场强，易得该细环带上电荷在 P 点激发的场强为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R + R\cos\theta}{[R^2 \sin^2\theta + (R + R\cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_r = \frac{\sigma\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\varepsilon_0}\frac{1+\cos\theta}{2\sqrt{2}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_r = -\frac{\sigma}{4\sqrt{2}\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\boldsymbol{e}_r \qquad (2)$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 是球心指向场点 P 方向的单位矢量.

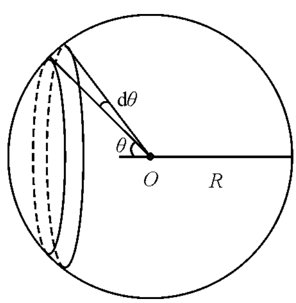

图 1　把球面分成细环带

因所有环带共轴，故每个环带上电荷在 P 点产生的元场强同向，即球面上电荷在 P 产生的场强沿球心与 P 的连线，故对上式直接积分即得球面上电荷在 P 点产生的电场强度.

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{4\sqrt{2}\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (3)$$

2.2　用推广的高斯定理的计算

以带电球面为高斯面，面上场强具有球对称性，因电荷只分布在球面上，得 $\sum\limits_{(S内)} q_i = 0$，球面上电荷为 Q，于是由式(1)有

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

故球面处的电场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (4)$$

显然，由式(4)可知，该计算结果与用库仑定律的计算结果、功能原理的计算结果[5]、以及用近似法计算的结果[6]一致.故均匀带电球面激发的静电场场强分布为

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_r & (r = R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & (r > R) \end{cases} \qquad (5)$$

3　无限长均匀带电圆柱面柱面处的电场强度

设电荷均匀分布在半径为 R 的无限长圆柱面上，电荷面密度为 σ.

3.1　用库仑定律的计算

视圆柱面由许多条弧长为 $R\mathrm{d}\varphi$ 的无限长平行细条组成，其中 $\mathrm{d}\varphi$ 为细条的圆心角.图 2 所示为圆柱面的任一横截面，P 为其上任一点，O 为截面中心.

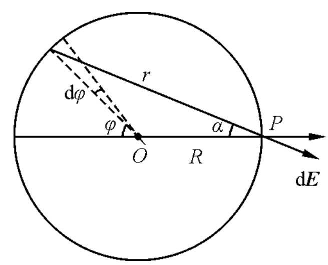

图 2　细条上电荷在圆柱面上激发的元场强

类比无限长均匀带电直线激发的电场，易得圆柱面上任意细条上电荷在 P 点激发的场强为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{\sigma R\mathrm{d}\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r \qquad (6)$$

式(6)中

$$r = [(R\cos\varphi + R)^2 + R^2\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}} = R\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$$

为 P 点到细条的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 为细条与横截面的交界指向 P 方向的单位矢量.

因圆柱面无限长且均匀带电，由对称性可知 P 点的总电场强度必定在 O、P 连线方向上，即在圆柱面的半径方向上.因此，P 点电场强度值等于 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在 OP 方向上投影的积分，即

$$E = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}E\cos\alpha = \int_0^{2\pi}\frac{\sigma R(R + R\cos\varphi)}{4\pi\varepsilon_0 R^2(1+\cos\varphi)}\mathrm{d}\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(下转第 32 页)

平，无水酒精，水，饱和食盐水，饱和硫酸铜溶液（将析出的硫酸铜晶体滤除），常温下饱和硝酸铵溶液（将过饱和的硝酸铵颗粒滤除）.

制作过程：

(1) 用天平依次称量 100 mL 无水酒精、水、饱和食盐水、饱和硫酸铜溶液、常温下饱和硝酸铵溶液的质量，并记录数据.

(2) 根据 $\rho=\dfrac{m}{V}$ 得出各种溶液的密度.

(3) 用砂纸磨去旺仔牛奶易拉罐筒身的包装漆.

(4) 在磨去包装油漆的位置划两条竖直的标尺线.

(5) 在其中一条标尺线标上 0 ～ 12 的均匀刻度.

(6) 在易拉罐中加入 25 mL 水.

(7) 在橡胶塞和易拉罐管壁抹上凡士林并盖上，此时在橡胶塞和易拉罐封口处再次抹上凡士林以达到密封的效果.

(8) 将易拉罐放入水中.

(9) 记下将易拉罐在水中与液面相平时标尺线上的刻度，并用记号笔将水的密度标于罐身上另一标尺线上.

(10) 重复“7”“8”“9” 步骤，将其他各液体的密度值标于易拉罐身. 整个过程如图 5 所示.

课堂将这个自制密度计的推出，使学生强烈地感受到物理的魅力. 学生必然渴望了解原理，从而点燃了学生思维的火花，培养了学生的创新能力.

图 5　探究不同液体的影响

项目学习坚持问题导向，体现学为中心，注重知识整合. 本节课以易拉罐为项目贯穿整个课堂，实现了寓教于乐，大大地激发了学生的学习兴趣，培养了学生的实践能力. 通过项目的展开，提升了学生的科学思维，更培养了学生的创新意识.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育物理课程标准（2022年版）[S]. 北京：北京师范大学出版社，2012.

[2] 许帮正. 如何设计素养目标导向的物理课堂学习项目[J]. 江苏教育，2022(19)：7－10.

（上接第 26 页）

从而得圆柱面上电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n$$

式中 $\boldsymbol{e}_n$ 为圆柱面外法线方向单位矢量.

3.2　用推广的高斯定理的计算

以带电圆柱面为高斯面，因电荷只分布在圆柱面上，故

$$\sum_{(S内)} q_i=0 \qquad Q=2\pi Rh\sigma$$

由式(1) 有

$$2\pi RhE=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{2\pi Rh\sigma}{2} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n$$

式中 h 为高斯面的高. 故无限长均匀带电圆柱面激发的静电场场强分布为

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n & (r=R)\\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_n & (r>R)\end{cases}$$

4　结果与分析

观察两种面电荷处电场的计算方法，从结果看，计算结果是相同的；从过程看，用推广的高斯定理的计算过程显然比用库仑定律的计算简单快捷. 推广的高斯定理因“重视” 高斯面上的电荷，从而“保全” 了空间的完整性；同时，澄清了尽管面电荷处场强存在突变，但其强度值却是唯一的.

参考文献

[1] 梁灿彬，秦光戎，梁竹健. 普通物理学教程 电磁学[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2018：17－18.

[2] 梁竹健. 普通物理学教程 电磁学习题分析与解答[M]. 北京：高等教育出版社，2020：13－14.

[3] 贾起民，郑永令，陈暨耀. 电磁学[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2021：33.

[4] 赵凯华，陈熙谋. 电磁学[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2011：43－45.

[5] 官秉尧. 对用高斯定理揭示带电球壳上场强的探讨[J]. 河北地质学院学报，1985，32(4)：79－84.

[6] 李响，马丽珍. 一道静电学竞赛题的分析及学习启示[J]. 物理与工程，2020，30(6)：72－74.