



# 试触法判别式的可靠性研究及其优化

唐 龙

(广安市现代实验中学 四川 广安 638600)

徐云东

(华蓥市教育科学研究室 四川 广安 638600)

(收稿日期:2023-04-11)

**摘要:**文章从理论上分析了试触法判别式是否总是可靠,讨论了判别式的分母到底用哪一组数据,以及是否有更准确的判别式,并且推导出用试触法测出的电流表、电压表示数的大小规律和电阻实际值的更准确范围。

**关键词:**试触法;测电阻;内外接;误差分析

## 1 问题缘由

在用试触法判断内外接法时,若  $\frac{\Delta I}{I} > \frac{\Delta U}{U}$ , 选内接;若  $\frac{\Delta I}{I} < \frac{\Delta U}{U}$ , 选外接. 但判别式里的分母  $I$ 、 $U$  到底是  $I_1$  还是  $I_2$ , 是  $U_1$  还是  $U_2$ ? 比如下面这道题, 按不同的分母算出来的结果是不一样的。

**【例1】**用电流表和电压表测量电阻  $R_x$  的阻值. 如图1所示, 分别将图1(a)和图1(b)两种测量电路连接到电路中, 按照图1(a)时, 电流表示数为 4.60 mA, 电压表示数为 2.50 V; 按照图1(b)时, 电流表示数为 5.00 mA, 电压表示数为 2.30 V, 比较这两次结果, 正确的是( )

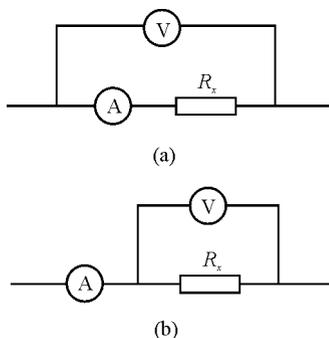


图1 例1题图

- A. 电阻的真实值更接近 543  $\Omega$ , 且大于 543  $\Omega$
- B. 电阻的真实值更接近 543  $\Omega$ , 且小于 543  $\Omega$
- C. 电阻的真实值更接近 460  $\Omega$ , 且大于 460  $\Omega$
- D. 电阻的真实值更接近 460  $\Omega$ , 且小于 460  $\Omega$

**解析:**选第一组数据作为分母有

$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.4 \text{ A}}{4.6 \text{ A}} = 0.087 > \frac{\Delta U}{U} = \frac{0.2 \text{ V}}{2.5 \text{ V}} = 0.08$ , 选内接.

选第二组数据作为分母有

$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.4 \text{ A}}{5.0 \text{ A}} = 0.08 < \frac{\Delta U}{U} = \frac{0.2 \text{ V}}{2.3 \text{ V}} = 0.087$ , 选外接.

笔者查阅了资料, 发现前人对这个问题研究非常少, 而且说法不一. 到底分母选用哪一个数据呢? 判别式是否总是可靠?

## 2 能否找到更合适的判别式

试触法是在其他电路不变的情况下进行的, 假设整个电路的电动势为  $E$ , 等效内阻为  $r$ , 外接测量数据为  $I_1$ 、 $U_1$ , 内接测量数据为  $I_2$ 、 $U_2$ , 如图2所示.

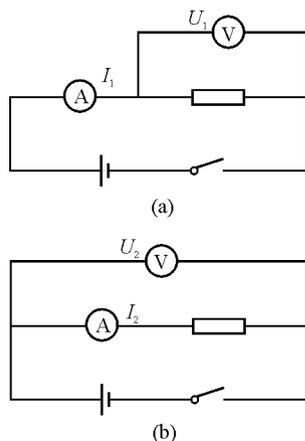


图2 试触法电路图

由外接相关数据可以推出

$$R_A = \frac{E - U_1}{I_1} - r \quad (1)$$

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{RR_V}{R + R_V} < R \quad (2)$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{I_1} - \frac{1}{R_V}} \quad (3)$$

$$\Delta R_1 = R - \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{\frac{1}{I_1} - \frac{1}{R_V}} - \frac{U_1}{I_1} \quad (4)$$

由内接相关数据可以推出

$$R_V = \frac{U_2}{\frac{E - U_2}{r} - I_2} \quad (5)$$

$$\frac{U_2}{I_2} = R_A + R \quad (6)$$

$$\Delta R_2 = R_A \quad (7)$$

将内接算出的  $R_V$  代入  $\Delta R_1$ , 外接算出的  $R_A$  代入  $\Delta R_2$ :

若  $\Delta R_1 > \Delta R_2$ , 选内接, 即

$$\frac{1}{\frac{E - U_2}{r} - I_2} - \frac{U_1}{I_1} > \frac{E - U_1}{I_1} - r \quad (8)$$

化简得

$$I_1 \left( \frac{1}{U_1} - \frac{1}{E - I_1 r} \right) < \frac{1}{U_2} \left( \frac{E - U_2}{r} - I_2 \right) \quad (9)$$

那么我们得到新的非常具有对称美的判别式.

### 3 利用新判别式分析原判别式的可靠性

若  $I_1 \left( \frac{1}{U_1} - \frac{1}{E - I_1 r} \right) < \frac{1}{U_2} \left( \frac{E - U_2}{r} - I_2 \right)$ , 选

内接.

若  $I_1 \left( \frac{1}{U_1} - \frac{1}{E - I_1 r} \right) > \frac{1}{U_2} \left( \frac{E - U_2}{r} - I_2 \right)$ , 选外接.

通过此判别式可以验证原本的判别式是否总是有效. 当  $E, r, R_V, R_A$ , 已知时, 由闭合电路欧姆定律可知

$$I_1 = \frac{E}{r + R_A + \frac{RR_V}{R + R_V}} \quad (10)$$

$$U_1 = E - I_1(r + R_A) \quad (11)$$

$$I_2 = \frac{E}{r + \frac{R_V(R + R_A)}{R_V + R + R_A}} \frac{R_V}{R_V + R + R_A} \quad (12)$$

$$U_2 = I_2(R + R_A) \quad (13)$$

再分别计算出

$$a = \frac{|U_1 - U_2|}{U_1} - \frac{|I_1 - I_2|}{I_1} \quad (14)$$

$$b = \frac{|U_1 - U_2|}{U_2} - \frac{|I_1 - I_2|}{I_2} \quad (15)$$

$$c = I_1 \left( \frac{1}{U_1} - \frac{1}{E - I_1 r} \right) - \frac{1}{U_2} \left( \frac{E - U_2}{r} - I_2 \right) \quad (16)$$

$a, b, c$  的正负分别代表“选外接”和“选内接”.  $a$  对应以外接法数据为分母的判别式,  $b$  对应以内接法数据为分母的判别式,  $c$  对应新判别式. 为了使图像更直观, 将  $c$  放大 100 倍, 对  $c$  的正负无影响.

当  $R_V = 10\,000\ \Omega, R_A = 20\ \Omega, E = 12\ \text{V}, r = 200\ \Omega$  时, 部分数据和图像如表 1 和图 3 所示.

表 1 新判别式与原判别式数据对比

| $R/\Omega$ | $I_1/\text{mA}$ | $U_1/\text{V}$ | $I_2/\text{Am}$ | $U_2/\text{V}$ | $a$      | $b$      | $100c$   |
|------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|----------|----------|----------|
| 400        | 19.9            | 7.63           | 19.1            | 8.02           | 0.012 8  | 0.008 9  | 0.002 9  |
| 410        | 19.6            | 7.70           | 18.8            | 8.08           | 0.010 7  | 0.006 8  | 0.002 3  |
| 420        | 19.3            | 7.63           | 18.5            | 8.14           | 0.008 7  | 0.004 8  | 0.001 7  |
| 430        | 19.0            | 7.82           | 18.2            | 8.19           | 0.006 7  | 0.002 8  | 0.001 2  |
| 440        | 18.7            | 7.88           | 17.9            | 8.25           | 0.004 7  | 0.000 9  | 0.000 7  |
| 450        | 18.4            | 7.94           | 17.7            | 8.30           | 0.002 9  | -0.001 0 | 0.000 3  |
| 460        | 18.2            | 8.00           | 17.4            | 8.35           | 0.001 0  | -0.002 8 | -0.000 1 |
| 470        | 17.9            | 8.05           | 17.2            | 8.40           | -0.000 8 | -0.004 6 | -0.000 5 |
| 480        | 17.7            | 8.10           | 16.9            | 8.45           | -0.002 6 | -0.006 4 | -0.000 9 |
| 490        | 17.5            | 8.16           | 16.7            | 8.50           | -0.004 3 | -0.008 2 | -0.001 2 |
| 500        | 17.2            | 8.21           | 16.4            | 8.54           | -0.006 0 | -0.009 9 | -0.001 5 |

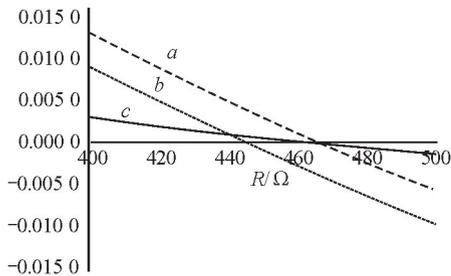


图3 数据拟合图像

图像显示大多数情况以外接数据为分母的判别式、以内接数据为分母的判别式和这里的新判别式是一致的,但在一个比较窄的区间出现了分歧.新判别式是按照公式严格推导,是绝对准确的,所以,有时以外接为分母的是正确的,有时以内接为分母的判别式是正确的,有时甚至会出现两种都错的情况,比如下面这种情况.

当  $R_V = 3\ 000\ \Omega$ ,  $R_A = 4\ \Omega$ ,  $E = 12\ \text{V}$ ,  $r = 200\ \Omega$  时,按照同样的方法可得到图4.

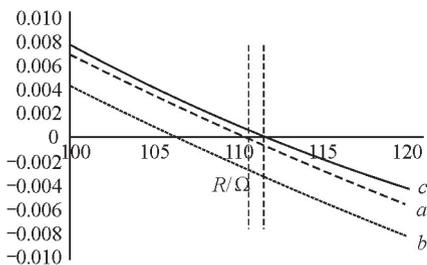


图4 特殊情况下的数据拟合图像

当待测电阻真实值位于图4中两条竖直虚线之间时,以外接数据为分母的判别式、以内接数据为分母的判别式结果都是内接,而误差更小的却是按照新判别式计算的结果——外接.

笔者也试过分母  $I$  用外接数据,分母  $U$  用内接数据,或者反过来,将4种排列组合都试过,结果没有一个是完全与新判别式一致.可见试触法判别式无论选什么为分母并非总是合理.

#### 4 回到原题

抛开所有的新旧判别式,为了解决这道题到底选哪一种接法更准确的问题,笔者试图构造电路的  $E$ 、 $r$ 、 $R_V$ 、 $R_A$ 、 $R$  使得数据为  $I_1 = 5\ \text{mA}$ 、 $U_1 = 2.3\ \text{V}$ 、 $I_2 = 4.6\ \text{mA}$ 、 $U_2 = 2.50\ \text{V}$ , 我们可以通过逆向运算,假设电阻准确值已知为  $R$ ,再计算出  $E$ 、 $r$ 、 $R_V$ 、 $R_A$ .

由外接电路推出电压表电阻

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{RR_V}{R + R_V} \quad (17)$$

$$R_V = \frac{1}{\frac{I_1}{U_1} - \frac{1}{R}} \quad (18)$$

由内接电路推出电流表内阻

$$R_A = \frac{U_2}{I_2} - R \quad (19)$$

外接时路端电压为  $I_1 R_A + U_1$ ,内接时干路电流为  $\frac{U_2}{R_V} + I_2$ .

等效内阻为路端电压的改变量与干路电流的改变量的比值,即

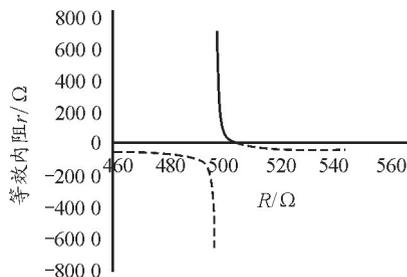
$$r = \frac{I_1 R_A + U_1 - U_2}{\frac{U_2}{R_V} + I_2 - I_1} \quad (20)$$

将式(18)和式(19)代入式(20)得电源等效内阻与  $R$  的关系为

$$r = \frac{I_1 \left( \frac{U_2}{I_2} - R \right) + U_1 - U_2}{U_2 \left( \frac{I_1}{U_1} - \frac{1}{R} \right) + I_2 - I_1} \quad (21)$$

当  $R$  在  $\frac{U_1}{I_1} = 460\ \Omega$  到  $\frac{U_2}{I_2} = 543\ \Omega$  之间变化时.

其电源等效内阻  $r - R$  的图像如图5所示.

图5  $r - R$  图像

结果显示,有时等效内阻  $r$  竟然是负值,这是不符合实际的. $r$  为正值对应的待测电阻的区间是要窄得多.可见,对任何已知的电流、电压表数据,一定能找到待测电阻更小的范围.待其他值都算出来之后,电动势

$$E = I_1 \left( r + R_A + \frac{U_1}{I_1} \right) \quad (22)$$

那么电动势会不会出现负值呢?根据公式,只要  $r$  是正值,电动势就不可能为负.故只能通过  $r$  大于零来缩小待测电阻范围.

#### 5 缩小范围

前面已经算出内阻  $r$  的表达式,可知

$$r = \frac{I_1 R_A + U_1 - U_2}{\frac{U_2}{R_V} + I_2 - I_1} > 0 \quad (23)$$

分母中的  $\frac{U_2}{R_V} + I_2$  是内接的干路电流, 绝对是大于外接的干路电流  $I_1$  的, 因为当从外接变成内接, 相当于电压表外面的电阻少了  $R_A$  的大小, 与电压表并联的部分多出来的阻值由于是并联一定小于  $R_A$ , 整个电路总阻值还是减小了, 所以内接时的干路电流增大. 所以分子分母均要大于零, 才满足实际情况.

由分子大于零得

$$I_A R_A > U_2 - U_1 \quad (24)$$

将式(19)代入上式得

$$R < \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1} \quad (25)$$

由分母大于零得

$$\frac{U_2}{R_V} > I_1 - I_2 \quad (26)$$

将式(18)代入上式得

$$R > \frac{1}{\frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_2}} \quad (27)$$

所以, 现在  $R$  的取值被缩小到了如下范围

$$\frac{1}{\frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_2}} < R < \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1} \quad (28)$$

如果将最初的问题数据代入上式, 会发现

$$496.5 \Omega < R < 503 \Omega$$

当电阻在此范围时,  $E$ 、 $r$ 、 $R_V$ 、 $R_A$  都在一个正常范围内, 通过实验可以将电表数据做出来. 此范围比之前的  $460 \Omega < R < 543 \Omega$  缩小了太多. 进一步, 如果存在这样的  $R$  值, 必须有左区间不大于右区间, 即

$$\frac{1}{\frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_2}} < \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1} \quad (29)$$

$$\left(\frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_2}\right) \left(\frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1}\right) > 1 \quad (30)$$

化简得

$$(I_1 - I_2)(U_2 - U_1) \left(\frac{1}{I_2 U_1} + \frac{1}{I_1 U_2}\right) > 0 \quad (31)$$

由外接到内接, 根据串反并同, 电压表的示数明显是变大的, 所以  $U_2 > U_1$ , 要上式成立, 则  $I_1 > I_2$ . 那么在出题的时候数据必须要满足此要求.

## 6 出题建议

对于普通学生, 出题数据需要考虑判别式的统一性; 对于竞赛生, 若将式(28)纳入知识范畴, 可以将例1改成如下例题.

**【例2】**用电流表和电压表测量电阻  $R_x$  的阻值. 如图6所示, 分别将图6(a)和图6(b)两种测量电路连接到电路中, 按照图6(a)时, 电流表示数为 4.60 mA, 电压表示数为 2.50 V; 按照图6(b)时, 电流表示数为 5.00 mA, 电压表示数为 2.30 V, 则电阻可能的值为( )

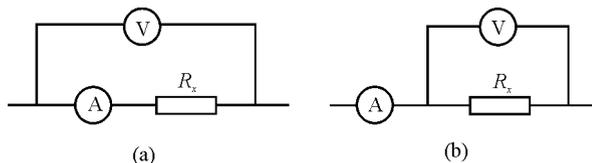


图6 例2题图

A. 470  $\Omega$     B. 500  $\Omega$     C. 530  $\Omega$     D. 560  $\Omega$

答案为选项 B.

## 7 结论

综上所述, 有以下结论.

(1) 试触法判别式选外接和内接为分母一般是一致且合理的, 但也会出现两种结果不一样甚至都与事实不符的情况.

(2) 若知道电动势和等效内阻近似值, 则可以用新判别式选择电流表接法. 新判别式如下:

若  $I_1 \left( \frac{1}{U_1} - \frac{1}{E - I_1 r} \right) < \frac{1}{U_2} \left( \frac{E - U_2}{r} - I_2 \right)$ , 选内接.

若  $I_1 \left( \frac{1}{U_1} - \frac{1}{E - I_1 r} \right) > \frac{1}{U_2} \left( \frac{E - U_2}{r} - I_2 \right)$ , 选外接.

(3) 若外接测量数据为  $I_1$ 、 $U_1$ , 内接测量数据为  $I_2$ 、 $U_2$ , 一定有

$$\text{a. } I_1 > I_2 \quad \text{b. } U_1 < U_2$$

$$\text{c. } \frac{1}{\frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_2}} < R < \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1}$$

最后这个结论是最实用的, 可以很大程度地缩小待测电阻范围, 甚至笔者认为可以用来代替教材上用试触法判断电流表接法, 改用推断待测电阻区间. 然而更加重要的不是结论, 而是发现结论的过程和解决问题的方法.