

匀强电场中的“聚焦”与“发散”

徐洪图 窦人静 唐英柱

(抚顺市第一中学 辽宁 抚顺 113001)

(收稿日期:2023-04-12)

摘要:带电粒子在匀强磁场中运动,在满足一定条件下便会出现“聚焦”——平进点出与“发散”——点进平出的现象.其实带电粒子在匀强电场中的运动也存在着类似的“聚焦”与“发散”的现象.以大量相同的带正电的粒子为研究对象,运用控制变量和分类讨论的方法,通过改变粒子的入射方式和匀强电场的边界条件,分别进行分析与讨论,并得出“聚焦”与“发散”的条件.

关键词:平进点出;点进平出;聚焦条件;发散条件

在光学中有平行于抛物面对称轴的光线射入抛物面后,其反射光线会汇聚于抛物面的焦点^[1].在磁场中有带电子粒子在匀强磁场中的“磁聚焦”——平进点出(以相互平行的速度射入磁场,从磁场区域圆周上的同一点射出);也存在“磁发散”——点进平出(从同一点沿垂直于磁场各个方向进入磁场,所有带电粒子都平行射出)。“磁发散”或“磁聚焦”现象的产生条件是圆形边界磁场,且圆形磁场区域的半径与粒子圆周运动的轨迹半径相等^[2-3].那么在匀强电场中是否也存在类似的“电聚焦”与“电发散”的现象呢?如果存在,实现“电聚焦”与“电发散”的条件又是什么呢?

下面将以大量相同的带正电的粒子为研究对象,运用控制变量法和分类讨论的方法,通过改变粒子的入射方式和匀强电场的边界条件,分别进行了分析、讨论,并得出带电粒子在匀强电场中“电聚焦”与“电发散”的条件.

1 “平进点出”——带电粒子在匀强电场中的聚焦问题

1.1 平行、等速聚焦条件讨论

【例1】如图1所示,大量质量为 m ,带电荷量为 $+q(q>0)$ 的粒子以相同的初速度 v_0 平行于 x 轴射入匀强电场,设粒子进入匀强电场时的位置坐标为

(x, y) ,求所有粒子均能经过坐标原点的条件?

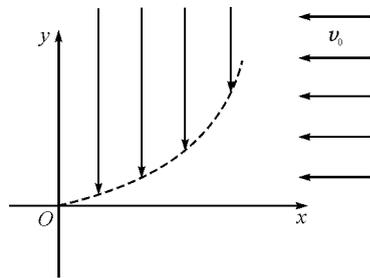


图1 例1题图

分析:根据粒子运动和受力的特点,可以建立以下关系式:

y 轴方向匀变速直线运动

$$y = \frac{1}{2}at^2 \quad (1)$$

x 轴方向匀速直线运动

$$x = v_0 t \quad (2)$$

$$a = \frac{Eq}{m} \quad (3)$$

利用式(2)可以求出

$$t = \frac{x}{v_0}$$

然后代入式(1),得到

$$y = \left(\frac{Eq}{2mv_0^2} \right) x^2 \quad (4)$$

通过以上分析可知,当匀强电场的边界满足抛物线方程

$$y = \left(\frac{Eq}{2mv_0^2} \right) x^2 \quad (5)$$

就可以使平行进入匀强电场的带电粒子从同一点 O 飞出。

1.2 平行、不等速聚焦条件讨论

【例2】如图2所示,沿 y 轴负方向的匀强电场, y 轴为匀强电场的左边界;大量质量为 m 、带电荷量为 $+q$ ($q > 0$) 的粒子从 $+y$ 轴上不同位置、沿 x 轴正方向的初速度 v_0 (大小未知) 射入匀强电场. 求这些粒子聚焦于同一点应满足的条件?

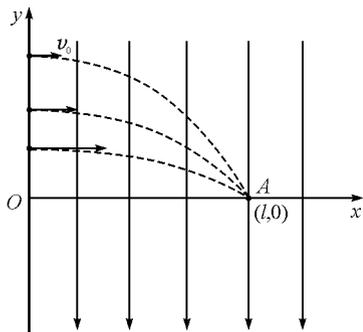


图2 例2题图

分析:若使这些粒子聚焦于同一点 $A(l, 0)$, 根据类平抛运动的特点, 建立方程有

$$y = \frac{1}{2} at^2 \quad (6)$$

$$l = v_0 t \quad (7)$$

$$a = \frac{Eq}{m} \quad (8)$$

其中 l 为定值, 通过式(7)可知粒子速度越小, 则运动时间越长, 射入点的纵坐标值越大。

将式(7)求解的时间, 代入式(6), 得到

$$y = \frac{Eq l^2}{2mv_0^2} \quad (9)$$

通过以上分析可知, 只要粒子的位置坐标和初速度满足方程

$$y = \frac{Eq l^2}{2mv_0^2}$$

便可以实现会聚于电场中的同一点 $A(l, 0)$ 。

2 “点进平出”——带电粒子在匀强电场中的发散

2.1 不同向、等速率发散条件讨论

【例3】如图3所示, 坐标原点处有一粒子源以相同速率 v_0 斜向上发射粒子, 粒子质量为 m 、带电

荷量为 $+q$ ($q > 0$), 粒子运动受到恒定电场力作用, 其运动轨迹为抛物线, 求当运动到轨迹的最高点(速度方向与 x 轴平行)时, 粒子恰好从匀强电场中射出应满足的条件。

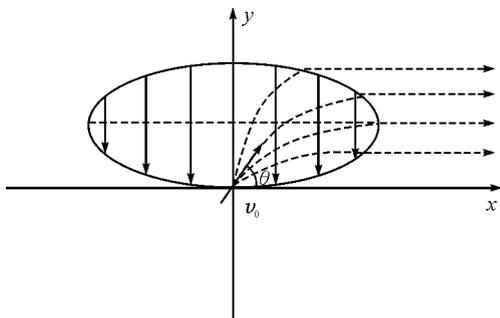


图3 例3题图

分析:设粒子射出匀强电场时的位置坐标为 (x, y) , 则

粒子沿 x 轴方向做匀速直线运动速度与时间满足

$$x = v_0 t \cos \theta \quad (10)$$

粒子沿 y 轴方向做匀减速直线运动其速度与时间的关系满足

$$v_0 \sin \theta = at \quad (11)$$

速度与位移的关系满足

$$(v_0 \sin \theta)^2 = 2ay \quad (12)$$

其中 $a = \frac{Eq}{m}$

将式(11)代入式(10)得

$$x = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{a} \quad (13)$$

将式(13)平方得

$$x^2 = \frac{v_0^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{a^2} \quad (14)$$

将式(13)、(14)两式联立并消去 θ , 整理得到关于 x 和 y 的函数方程

$$\frac{\left(y - \frac{v_0^2}{4a} \right)^2}{\left(\frac{v_0^2}{4a} \right)^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{v_0^2}{2a} \right)^2} = 1 \quad (15)$$

此边界为椭圆边界, 其中椭圆中心坐标为 $\left(0, \frac{v_0^2}{4a} \right)$,

半长轴为 $\frac{v_0^2}{2a}$, 半短轴为 $\frac{v_0^2}{4a}$ 。

通过以上分析可知, 粒子源以相同速率 v_0 发射

粒子,只要匀强电场的边界满足以上函数关系式的椭圆,粒子便可以平行于 x 轴方向射出匀强电场,实现点进平出;直线边界的匀强电场在满足一定条件下也可以实现“点进平出”。

2.2 同向、不等速率发散条件讨论

【例4】如图4所示,匀强电场边界与 x 轴夹角为 α ,粒子源发射一质量为 m 、带电荷量为 $+q$ ($q > 0$)的粒子,其速度与 x 轴夹角为 β ,求粒子从匀强电场边界飞出时恰好平行于 x 轴应满足的条件。

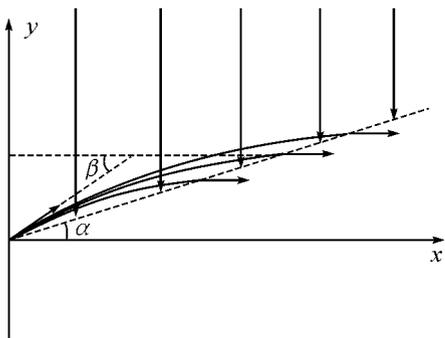


图4 例4题图

分析:此过程为类斜抛运动,反向可以看成类平抛运动,根据平抛运动的推论有

$$\tan \beta = 2 \tan \alpha \quad (16)$$

若粒子源发射的所有粒子速度方向均与 x 轴夹角为 β ,且满足

$$\tan \beta = 2 \tan \alpha \quad (17)$$

则这些粒子均能沿 x 轴方向、相互平行的飞出直线边界电场,实现“点进平出”。

如图5所示,若粒子速度方向不满足

$$\tan \beta = 2 \tan \alpha \quad (18)$$

则再次回到直线边界的粒子,其速度方向将不平行于 x 轴。

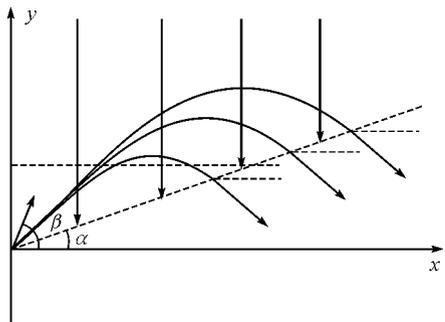


图5 速度方向不平行于 x 轴

设粒子源发出粒子的初速度方向均与 x 轴夹角为 β ,匀强电场边界与 x 轴夹角为 α ,再次回到边界上时其速度与水平方向的夹角为 θ ,速度大小为 v_0 ,逆向思维建立如下关系式

$$\tan \beta = \frac{-v_0 \sin \theta + gt}{v_0 \cos \theta} \quad (18)$$

$$\tan \alpha = \frac{-v_0 t \sin \theta + \frac{1}{2}gt^2}{v_0 t \cos \theta} \quad (19)$$

由式(18)、(19)整理可得关系式

$$\tan \beta = 2 \tan \alpha + \tan \theta \quad (20)$$

此关系式反映了各个角之间的数量关系.从关系式中不难发现,粒子源向某一确定方向(与 x 轴夹角为 β)发射速率不同的粒子,若均能从同一直线边界射出,这些粒子将相互平行地沿同一方向(与水平方向夹角为 θ)飞离匀强电场,实现“点进平出”。

可见,粒子源在直线边界上某点朝着某一方向射入匀强电场后,只要粒子能飞出直线边界,所有粒子射出的方向均相同,实现“点进平出”。

3 总结

我们知道,力学与电磁学是物理学两个独立的分支,它们各自遵循自己的规律.但在某些特定条件下,它们在深层次上、特别是在数学表达式上有相同或相似的形式,做为教师要做好这样的综合。

综上所述,通过改变粒子的入射方式和匀强电场的边界条件等,分别进行分析、分类讨论,得出粒子进入匀强电场后,实现“平进点出”和“点进平出”的条件;我们不难发现,条件都是利用类平抛运动相关知识得出的.在平时的教学中适当引入,可以有助于学生对平抛、类平抛运动的理解与应用。

参考文献

- [1] 陆天明.用物理方法证明抛物面焦点的光学性质[J].中学物理,2004,22(9):25.
- [2] 王跃军.圆形有界磁场中“磁发散”与“磁聚焦”规律的探析[J].教学考试,2021(49),49-51.
- [3] 吴建鹏.透析带电粒子在圆边界磁场中的磁发散与磁聚焦现象[J].中学物理教学参考,2020,49(8):18-19.