

# 连续分布电荷体系电荷元的自能问题\*

付全红 常健 郑建邦

(西北工业大学物理科学与技术学院 陕西 西安 710129)

(收稿日期:2023-04-12)

**摘要:**连续分布电荷体系可分割为无穷多个电荷元,系统研究了电荷元的自能问题.利用均匀带电球体和均匀带电圆面的自能公式和夹逼定理,分两步严格证明了连续分布电荷体系电荷元的自能之和为零.第一步,证明自由电荷体系电荷元的自能之和为零;第二步,证明一般电荷体系电荷元的自能之和为零.因此,连续分布电荷体系的电场能就等于电荷元之间的相互作用能.

**关键词:**电场能;自能;相互作用能;电荷元;夹逼定理

电荷体系的能量是一个被广泛讨论的问题.当一个电荷体系由若干部分组成时,电荷体系的电场能等于各部分的自能与各部分之间的相互作用能之和.一个连续分布电荷体系,例如连续带电体、连续带电曲面等,可分割为无穷多个电荷元,电荷体系的电场能等于电荷元的自能与电荷元之间的相互作用能之和<sup>[1-4]</sup>.文献一般认为,由于电荷元的电荷量趋于零,故电荷元的自能趋于零,所有电荷元的自能之和也趋于零,因此,电荷体系的电场能就等于电荷元之间的相互作用能<sup>[5-10]</sup>.

上述推理虽然结论正确,但是不够严谨,原因在于虽然电荷元的自能趋于零,但是电荷元的数目趋于无穷大,因此,所有电荷元的自能之和也趋于零需要从数学上严格证明.文献[11-12]以自由体电荷为例对该问题做了一些研究,但是没有涉及面电荷和极化电荷的情形.

本文系统研究连续分布电荷体系电荷元的自能问题,利用均匀带电球体和均匀带电圆面的自能公式和夹逼定理,分两步严格证明连续分布电荷体系电荷元的自能之和为零:第一步,证明自由电荷体系电荷元的自能之和为零;第二步,证明一般电荷体系电荷元的自能之和为零.

## 1 自由电荷体系电荷元的自能

### 1.1 自由体电荷的电荷元的自能

考察任意一个自由体电荷,相对介电常数为1,体电荷密度为 $\rho_i$ ,体积为 $V$ .将自由体电荷分割为 $N_1(N_1 \rightarrow \infty)$ 个正方体电荷元,边长为 $a_1(a_1 \rightarrow 0)$ .

自由体电荷的电场能为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dV &= \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \\ &= \int \frac{\epsilon_0}{2} \left| \sum_i \mathbf{E}_i \right|^2 dV = \\ &= \sum_i \int \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} dV + \sum_{i \neq j} \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j}{2} dV \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{E}_i$ 和 $\mathbf{E}_j$ 分别表示第 $i$ 个和第 $j$ 个正方体电荷元在空间产生的电场强度.

第 $i$ 个正方体电荷元的自能为

$$W_{\text{正方体},i} = \int \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} dV \quad (2)$$

所有正方体电荷元的自能之和为

$$\sum_i W_{\text{正方体},i} = \sum_i \int \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} dV \quad (3)$$

正方体电荷元的自能不便直接计算,转而计算正方体电荷元的内切球(半径为 $\frac{a_1}{2}$ )和外接球(半径为

\* 西北工业大学教育教学改革研究项目,项目编号:2023JGY30,2022JGY27,2023JGWG07.

作者简介:付全红(1981-),男,博士,主要从事大学物理教学和人工微结构的电磁行为研究.

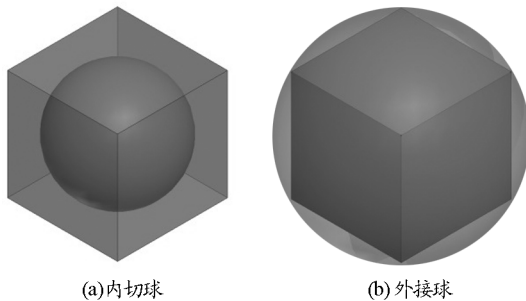
通讯作者:郑建邦(1965-),男,博士,教授,主要从事大学物理、电磁学教学和红外探测材料及器件研究.

$\frac{\sqrt{3}a_1}{2}$ ) 的自能,如图 1 所示.内切球和外接球可以看

作均匀带电球体,其自能为<sup>[1]</sup>

$$W_{\text{球体}} = \frac{3Q_i^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{4\pi\rho_i^2 R^5}{15\epsilon_0} \quad (4)$$

式中, $Q_i$ 、 $R$ 、 $\rho_i$  分别表示均匀带电球体的电荷量、半径、体电荷密度.



(a)内切球

(b)外接球

图 1 正方体电荷元的内切球和外接球

为了方便起见,将正方体电荷元减去内切球剩下的部分,或外接球减去正方体电荷元剩下的部分叫做“边角料”.对于图 1(a),正方体电荷元的自能等于内切球的自能、“边角料”的自能、内切球与“边角料”的相互作用能之和,由于内切球和“边角料”带同种电荷,相互作用能大于零,故正方体电荷元的自能大于内切球的自能.同理,对于图 1(b),正方体电荷元的自能小于外接球的自能.因此

$$W_{\text{内切球},i} < W_{\text{正方体},i} < W_{\text{外接球},i} \quad (5)$$

$$\sum_i W_{\text{内切球},i} < \sum_i W_{\text{正方体},i} < \sum_i W_{\text{外接球},i} \quad (6)$$

根据式(4),内切球和外接球的自能分别为

$$W_{\text{内切球},i} = \frac{4\pi\rho_{i,i}^2 \left(\frac{a_1}{2}\right)^5}{15\epsilon_0} = \frac{\pi\rho_{i,i}^2 a_1^5}{120\epsilon_0} \quad (7)$$

$$W_{\text{外接球},i} = \frac{4\pi\rho_{i,i}^2 \left(\frac{\sqrt{3}a_1}{2}\right)^5}{15\epsilon_0} = \frac{3\sqrt{3}\pi\rho_{i,i}^2 a_1^5}{40\epsilon_0} \quad (8)$$

式中, $\rho_{i,i}$  表示第  $i$  个正方体电荷元的体电荷密度.

当  $a_1 \rightarrow 0$  时, $W_{\text{内切球},i} \rightarrow 0$ , $W_{\text{外接球},i} \rightarrow 0$ ,根据夹逼定理

$$W_{\text{正方体},i} \rightarrow 0 \quad (9)$$

即正方体电荷元的自能为零.

下面证明所有正方体电荷元的自能之和也为零.

$$\begin{aligned} \sum_i W_{\text{内切球},i} &= \sum_i \frac{\pi\rho_{i,i}^2 a_1^5}{120\epsilon_0} \geq \\ \sum_i \frac{\pi|\rho_{f,\min}|^2 a_1^5}{120\epsilon_0} &= N_1 \frac{\pi|\rho_{f,\min}|^2 a_1^5}{120\epsilon_0} = \\ \frac{V}{a_1^3} \frac{\pi|\rho_{f,\min}|^2 a_1^5}{120\epsilon_0} &= \frac{\pi|\rho_{f,\min}|^2 V}{120\epsilon_0} a_1^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_i W_{\text{外接球},i} &= \sum_i \frac{3\sqrt{3}\pi\rho_{i,i}^2 a_1^5}{40\epsilon_0} \leq \\ \sum_i \frac{3\sqrt{3}\pi|\rho_{f,\max}|^2 a_1^5}{40\epsilon_0} &= \\ N_1 \frac{3\sqrt{3}\pi|\rho_{f,\max}|^2 a_1^5}{40\epsilon_0} &= \\ \frac{V}{a_1^3} \frac{3\sqrt{3}\pi|\rho_{f,\max}|^2 a_1^5}{40\epsilon_0} &= \\ \frac{3\sqrt{3}\pi|\rho_{f,\max}|^2 V}{40\epsilon_0} a_1^2 \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $|\rho_{f,\min}|$  和  $|\rho_{f,\max}|$  分别表示体电荷密度绝对值的最小值和最大值.由式(6)、式(10)、式(11)得

$$\begin{aligned} \frac{\pi|\rho_{f,\max}|^2 V}{120\epsilon_0} a_1^2 &\leq \sum_i W_{\text{正方体},i} \leq \\ \frac{3\sqrt{3}\pi|\rho_{f,\max}|^2 V}{40\epsilon_0} a_1^2 & \end{aligned} \quad (12)$$

当  $a_1 \rightarrow 0$  时,有

$$\begin{aligned} \frac{\pi|\rho_{f,\max}|^2 V}{120\epsilon_0} a_1^2 &\rightarrow 0 \\ \frac{3\sqrt{3}\pi|\rho_{f,\max}|^2 V}{40\epsilon_0} a_1^2 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

根据夹逼定理

$$\sum_i W_{\text{正方体},i} \rightarrow 0 \quad (13)$$

即所有正方体电荷元的自能之和也为零.

## 1.2 自由面电荷电荷元的自能

考察任意一个自由面电荷,相对介电常数为 1,面电荷密度为  $\sigma_f$ ,面积为  $S$ .将自由面电荷分割为  $N_2$  ( $N_2 \rightarrow \infty$ ) 个等边三角形电荷元,边长为  $a_2$  ( $a_2 \rightarrow 0$ ).

自由面电荷的电场能为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dV &= \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \\ \int \frac{\epsilon_0}{2} \left| \sum_i \mathbf{E}_i \right|^2 dV &= \\ \sum_i \int \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} dV + \sum_{i \neq j} \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j}{2} dV & \end{aligned} \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{E}_i$  和  $\mathbf{E}_j$  分别表示第  $i$  个和第  $j$  个等边三角形电荷元在空间产生的电场强度.

第  $i$  个等边三角形电荷元的自能为

$$W_{\text{等边三角形},i} = \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \quad (15)$$

所有等边三角形电荷元的自能之和为

$$\sum_i W_{\text{等边三角形},i} = \sum_i \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \quad (16)$$

等边三角形电荷元的自能不便直接计算, 转而计算

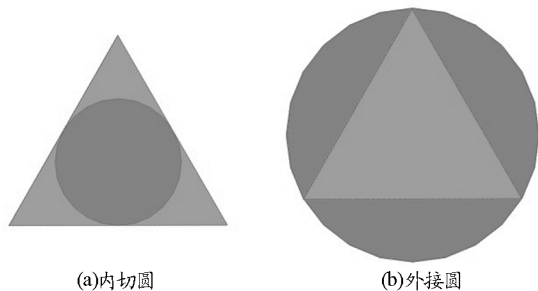
等边三角形电荷元的内切圆(半径为  $\frac{\sqrt{3}a_2}{6}$ ) 和外接

圆(半径为  $\frac{\sqrt{3}a_2}{3}$ ) 的自能, 如图 2 所示. 内切圆和外

接圆可以看作均匀带电圆面, 其自能为<sup>[14]</sup>

$$W_{\text{圆面}} = \gamma \frac{Q_i^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \gamma \frac{\pi\sigma_f^2 R^3}{8\epsilon_0} \quad (17)$$

式中,  $\gamma \approx 1.7$  为均匀带电圆面的自能系数,  $Q_i$ 、 $R$ 、 $\sigma_f$  分别表示均匀带电圆面的电荷量、半径、面电荷密度.



(a)内切圆

(b)外接圆

图 2 等边三角形电荷元的内切圆和外接圆

为了方便起见, 将等边三角形电荷元减去内切圆剩下的部分, 或外接圆减去等边三角形电荷元剩下的部分叫做“边角料”. 对于图 2(a), 等边三角形电荷元的自能等于内切圆的自能、“边角料”的自能、内切圆与“边角料”的相互作用能之和, 由于内切圆和“边角料”带同种电荷, 相互作用能大于零, 故等边三角形电荷元的自能大于内切圆的自能. 同理, 对于图 2(b), 等边三角形电荷元的自能小于外接圆的自能. 因此

$$W_{\text{内切圆},i} < W_{\text{等边三角形},i} < W_{\text{外接圆},i} \quad (18)$$

$$\sum_i W_{\text{内切圆},i} < \sum_i W_{\text{等边三角形},i} < \sum_i W_{\text{外接圆},i} \quad (19)$$

根据式(16), 内切圆和外接圆的自能分别为

$$W_{\text{内切圆},i} = \gamma \frac{\pi\sigma_{f,i}^2 \left(\frac{\sqrt{3}a_2}{6}\right)^3}{8\epsilon_0} = \gamma \frac{\sqrt{3}\pi\sigma_{f,i}^2 a_2^3}{576\epsilon_0} \quad (20)$$

$$W_{\text{外接圆},i} = \gamma \frac{\pi\sigma_{f,i}^2 \left(\frac{\sqrt{3}a_2}{3}\right)^3}{8\epsilon_0} = \gamma \frac{\sqrt{3}\pi\sigma_{f,i}^2 a_2^3}{72\epsilon_0} \quad (21)$$

式中,  $\sigma_{f,i}$  表示第  $i$  个等边三角形电荷元的面电荷密度.

当  $a_2 \rightarrow 0$  时,  $W_{\text{内切圆},i} \rightarrow 0$ ,  $W_{\text{外接圆},i} \rightarrow 0$ , 根据夹逼定理

$$W_{\text{等边三角形},i} \rightarrow 0 \quad (22)$$

即等边三角形电荷元的自能为零.

下面证明所有等边三角形电荷元的自能之和也为零.

$$\begin{aligned} \sum_i W_{\text{内切圆},i} &= \sum_i \gamma \frac{\sqrt{3}\pi\sigma_{f,i}^2 a_2^3}{576\epsilon_0} \geq \\ \sum_i \gamma \frac{\sqrt{3}\pi |\sigma_f|_{\min}^2 a_2^3}{576\epsilon_0} &= N_2 \gamma \frac{\sqrt{3}\pi |\sigma_f|_{\min}^2 a_2^3}{576\epsilon_0} = \\ &= \frac{S}{\sqrt{3}a_2^2} \gamma \frac{\sqrt{3}\pi |\sigma_f|_{\min}^2 a_2^3}{576\epsilon_0} = \\ &= \frac{\pi |\sigma_f|_{\min}^2 S a_2}{144\epsilon_0} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sum_i W_{\text{外接圆},i} &= \sum_i \gamma \frac{\sqrt{3}\pi\sigma_{f,i}^2 a_2^3}{72\epsilon_0} \leq \\ \sum_i \gamma \frac{\sqrt{3}\pi |\sigma_f|_{\max}^2 a_2^3}{72\epsilon_0} &= N_2 \gamma \frac{\sqrt{3}\pi |\sigma_f|_{\max}^2 a_2^3}{72\epsilon_0} = \\ &= \frac{S}{\sqrt{3}a_2^2} \gamma \frac{\sqrt{3}\pi |\sigma_f|_{\max}^2 a_2^3}{72\epsilon_0} = \\ &= \frac{\pi |\sigma_f|_{\max}^2 S a_2}{18\epsilon_0} \end{aligned} \quad (24)$$

式中,  $|\sigma_f|_{\min}$  和  $|\sigma_f|_{\max}$  分别表示面电荷密度绝对值的最小值和最大值. 由式(19)、式(23)、式(24)得

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\pi |\sigma_f|_{\min}^2 S a_2}{144\epsilon_0} &\leq \sum_i W_{\text{等边三角形},i} \leq \\ \gamma \frac{\pi |\sigma_f|_{\max}^2 S a_2}{18\epsilon_0} & \end{aligned} \quad (25)$$

当  $a_2 \rightarrow 0$  时,有

$$\gamma \frac{\pi |\sigma_f|_{\min}^2 S}{144\epsilon_0} a_2 \rightarrow 0$$

$$\gamma \frac{\pi |\sigma_f|_{\max}^2 S}{18\epsilon_0} a_2 \rightarrow 0$$

根据夹逼定理

$$\sum_i W_{\text{等边三角形}, i} \rightarrow 0 \quad (26)$$

即所有等边三角形电荷元的自能之和也为零.

## 2 一般电荷体系电荷元的自能

第1节研究了自由电荷体系电荷元的自能,本节在此基础上研究一般电荷体系(既有自由电荷,也有极化电荷)的电荷元的自能.考察任意一个一般电荷体系,介电常数为  $\epsilon$ ,自由体电荷密度为  $\rho_f$ 、自由面电荷密度为  $\sigma_f$ 、极化体电荷密度为  $\rho_p$ 、极化面电荷密度为  $\sigma_p$ .将体电荷分割为  $N_1$  ( $N_1 \rightarrow \infty$ ) 个正方体电荷元,边长为  $a_1$  ( $a_1 \rightarrow 0$ ),面电荷分割为  $N_2$  ( $N_2 \rightarrow \infty$ ) 个等边三角形电荷元,边长为  $a_2$  ( $a_2 \rightarrow 0$ ).

一般电荷体系的电场能为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dV &= \int \frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} dV = \\ &= \int \frac{\epsilon}{2} \left| \sum_i \mathbf{E}_i \right|^2 dV = \\ &= \sum_i \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV + \sum_{i \neq j} \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j}{2} dV \end{aligned} \quad (27)$$

式中,  $\mathbf{E}_i$  和  $\mathbf{E}_j$  分别表示第  $i$  个和第  $j$  个(正方体或等边三角形)电荷元在空间产生的电场强度.

第  $i$  个(正方体或等边三角形)电荷元的自能为

$$W_i = \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV \quad (28)$$

所有(正方体或等边三角形)电荷元的自能之和为

$$\sum_i W_i = \sum_i \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV \quad (29)$$

先证明一般电荷体系(正方体或等边三角形)电荷元的自能为零.

$$\begin{aligned} W_i &= \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV \geq \int \frac{\epsilon_{\min} \mathbf{E}_i^2}{2} dV = \\ &= \frac{\epsilon_{\min}}{\epsilon_0} \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} W_i &= \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV \leq \int \frac{\epsilon_{\max} \mathbf{E}_i^2}{2} dV = \\ &= \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_0} \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \end{aligned} \quad (31)$$

式中,  $\epsilon_{\min}$  和  $\epsilon_{\max}$  分别表示介电常数的最小值和最大值.由式(30)和式(31)得

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{\min}}{\epsilon_0} \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV &\leq W_i \leq \\ &= \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_0} \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \end{aligned} \quad (32)$$

考察一般电荷体系的等效自由电荷体系(此处的“等效”是指两个电荷体系在空间产生的电场分布相同),自由体电荷密度为  $\rho'_f = \rho_f + \rho_p$ 、自由面电荷密度为  $\sigma'_f = \sigma_f + \sigma_p$ .  $\int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV$  表示等效自由电荷体系的第  $i$  个(正方体或等边三角形)电荷元的自能,根据第1节的结论,当  $a_1, a_2 \rightarrow 0$  时,有

$$\int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \rightarrow 0$$

根据夹逼定理

$$W_i = \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV \rightarrow 0 \quad (33)$$

即一般电荷体系(正方体或等边三角形)电荷元的自能为零.

再证明一般电荷体系所有(正方体或等边三角形)电荷元的自能之和也为零.

$$\begin{aligned} \sum_i W_i &= \sum_i \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV \geq \\ &= \sum_i \int \frac{\epsilon_{\min} \mathbf{E}_i^2}{2} dV = \frac{\epsilon_{\min}}{\epsilon_0} \sum_i \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sum_i W_i &= \sum_i \int \frac{\epsilon \mathbf{E}_i^2}{2} dV \leq \\ &= \sum_i \int \frac{\epsilon_{\max} \mathbf{E}_i^2}{2} dV = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_0} \sum_i \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \end{aligned} \quad (35)$$

由式(34)和式(35)得

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{\min}}{\epsilon_0} \sum_i \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV &\leq \sum_i W_i \leq \\ &= \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_0} \sum_i \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV \end{aligned} \quad (36)$$

式中,  $\sum_i \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}_i^2}{2} dV$  表示等效自由电荷体系所有(正方体或等边三角形)电荷元的自能之和,根据第1

节的结论,当  $a_1, a_2 \rightarrow 0$  时,有

$$\sum_i \int \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} dV \rightarrow 0$$

根据夹逼定理

$$\sum_i \int \frac{\epsilon E_i^2}{2} dV \rightarrow 0 \quad (37)$$

即一般电荷体系所有(正方体或等边三角形)电荷元的自能之和也为零.

### 3 结论

本文系统研究了连续分布电荷体系电荷元的自能问题,利用均匀带电球体和均匀带电圆面的自能公式和夹逼定理,严格证明了连续分布电荷体系电荷元的自能之和为零.因此,连续分布电荷体系的电场能就等于电荷元之间的相互作用能.

#### 参考文献

- [1] 赵凯华,陈熙谋.电磁学[M].4版.北京:高等教育出版社,2018:60-61.
- [2] 王秋芬.静电体系能量的讨论[J].物理通报,1997(6):4-7.
- [3] 顾大男.从一道模拟试题的佯谬谈带电导体的静电能[J].物理通报,2002(6):16-17.

- [4] 苑新喜.由电荷的量子性看静电场的能量计算[J].物理通报,2022(9):25-28.
- [5] 姚超元,马明敏.静电学中的能量[J].大学物理,1986(9):1-2.
- [6] 陈德坤.两种带电体系的电势能与电场能[J].大学物理,1990(3):23,11.
- [7] 高端堂.关于静电场中的自能与相互作用能[J].大学物理,1995,14(1):15-17.
- [8] 冀敏,蒋平.带电导体体系的电场能量[J].物理与工程,2015,25(3):34-37.
- [9] 李淑凤,王艳辉,马春利,等.静电场中的相关能量[J].物理与工程,2016,26(Z1):49-52.
- [10] 李宇翔,黄亦斌.静电感应时的静电能和电势能[J].物理与工程,2020,30(5):92-96.
- [11] 赵佳,田晓岑.关于静电体系总能和相互作用能的几点讨论[J].大学物理,2001,20(3):21-23.
- [12] 梁昌洪,陈曦.静电场的自作用能[J].电气电子教学学报,2009,31(2):1-4,7.
- [13] 郭硕鸿.电动力学[M].3版.北京:高等教育出版社,2008:31.
- [14] 于凤军.带电体的自能系数及其规律的研究[J].大学物理,2010,29(12):1-6,17.

## Self-Energy Issue of Charge Element in a Continuously Distributed Charge System

FU Quanhong CHANG Jian ZHENG Jian bang

(School of Physical Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710129)

**Abstract:** The continuously distributed charge system can be divided into infinitely many charge elements, and the self-energy issue of charge element is systematically investigated. By using the self-energy formula of uniformly charged sphere and disk and squeeze theorem, it is strictly proved that the sum of the self-energy of the charge elements of the continuously distributed charge system is zero in two steps: firstly, it is proved that the sum of the self-energy of the charge elements of the free charge system is zero; secondly, it is proved that the sum of the self-energy of the charge elements of the general charge system is zero. Therefore, the electric field energy of continuously distributed charge system is equal to the interaction energy between charge elements.

**Key words:** electric field energy; self-energy; interaction energy; charge element; squeeze theorem