

基于 3D 打印与轨迹追踪探究最速降线问题*

邱智宇 肖桂娜

(上海师范大学数理学院 上海 200234)

(收稿日期:2023-04-14)

摘要:采用 SolidWorks 软件建立最速降线轨道模型,通过 3D 打印技术获得最速降线教具.再通过轨迹追踪软件 Tracker 分析实验过程中的轨迹、加速度随时间变化的关系,分析图像发现加速度随时间的增加而减小,并探究了从不同高度下落的物体运动的时间,证明了物体从最速降线的不同位置下落具有等时性.

关键词:3D 打印;最速降线;轨迹追踪;等时性

1 引言

伽利略于 1630 年提出疑问:给定两点 A、B,且 B 与 A 的连线与水平面不垂直.若不计摩擦力,物体在重力作用下沿着怎样的曲线从点 A 滑到到点 B,下滑的时间最短?^[1]从直线到圆弧,再到最终旋轮线(最速降线)的确立^[2-3],离不开伟大的物理学家建立在头脑中的实验室与计算系统.

随着现代信息技术的快速发展,依据最速降线的参数方程,本文利用 SolidWorks 软件建立 3D 模型,3D 打印技术完成实体零件制作,拼装后探究物体在斜面上与最速降线上下落运动情况,利用 Tracker 进行数据处理.应用现代信息技术研究物理运动观念,不仅能够高效、可视化地获得速度、位移随时间变化的关系,及时更新教学模式与理念,还可有效吸引学生兴趣,提高课堂教学效果.

2 实验原理

最速降线的确立一波三折,问题提出后吸引了很多著名数学家、物理学家的关注:牛顿、莱布尼茨、约翰伯努利和雅克比伯努利都研究过此问题,最终给出了正确的结果^[2].不同于伯努利应用费马原理

类比获得结果,本文通过欧拉-拉格朗日方程推导最速降线的参数方程^[4].

如图 1 所示,A 和 B 是平面上不在同一铅直线上的两点,在所有连接 A 和 B 的平面曲线中,存在一条曲线仅受重力作用,且质点从 A 点静止释放运动到 B 点沿这条曲线运动时所需时间最短.以 A 为坐标原点,建立平面直角坐标系,同时 A 也是半径为 R 的圆沿着 x 轴旋转的一个关注点, θ 表示在转动过程中 A 点转过的角度.

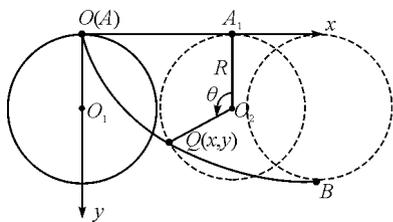


图 1 最速降线原理图

不计摩擦阻力,质量为 m 的小球仅受到重力作用,所以机械能守恒

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

可以获得小球在曲线上运动的瞬时速度为

$$v = \sqrt{2gy} \quad (2)$$

取 Q 上的极小一段距离 ds , 小球通过该段距离

* 上海高校市级重点课程“普通物理实验”,课程编号:沪教委高(2022)17号;上海师范大学本科教改研究一般项目“基于物理问题引导的普通物理实验教学研究”.

作者简介:邱智宇(1999-),女,在读硕士研究生,研究方向为中学物理学科教学.

通讯作者:肖桂娜(1983-),女,博士,副教授,主要从事材料物理、物理实验教育研究.

需要时间 dt 为

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \quad (3)$$

其中根据几何关系,可得

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4)$$

所以小球运动的总时间可以由积分得到

$$t = \int_0^t dt = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (5)$$

令

$$F(y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

需要找到一个函数 $f(x)$ 使得式(5)中的结果最小.

通过欧拉-拉格朗日第二方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (6)$$

由于 $F(y, y')$ 与 x 无关,所以

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

原方程可简化为

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (7)$$

括号内的函数关系式为常数 C ,得

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad (8)$$

代入 $F(y, y')$ 后获得微分方程,利用分离变量法可以获得小球运动的参数方程

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (9)$$

该结果被多人论证过充分性和必要性^[5].

此外,还可以获得小球沿最速降线下落的运动时间

$$T = \int_0^\pi \frac{ds}{v} = \int_0^\pi \frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}}{\sqrt{2gR-2gR\cos\theta}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\pi d\theta = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (10)$$

上式中 π 、 R 、 g 都是常量,不随着释放高度的变化而变化,物体下落的时间与初始位置无关,最速降线也被称为等时降线.

3 实验方法

自制实验器材利用 SolidWorks 建立模型,应用轻薄光滑的树脂材料,光源为 355 nm 的高精度 SLA 光固化 3D 打印快速成型系统进行 3D 打印,建构的固件都具有高精度和尺寸的稳定性.

首先,如图 2 所示,在 SolidWorks 软件上建立 3D 模型,基于前视基准面建构草图,选择方程式驱动的曲线,并将最速降线的参数方程输入,选择合适的参数范围即可获得最速降线.使用直线将构建封闭,拉伸后获得构建的 3D 模型.

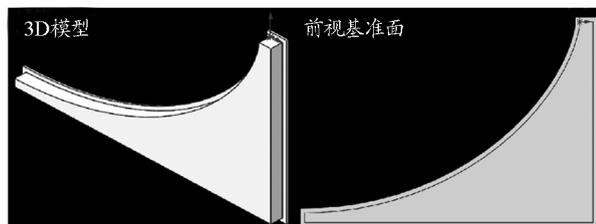


图2 利用 SolidWorks 建立 3D 模型图

3D 打印选用的材料是树脂材料,在塑形前为乳白色粘稠液体,其黏度为 497 cps,密度为 $1.14 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,通过 ASTM 标准测试制件性能,具有光滑、不易弯曲变形等特性.

不同的曲线方程即可获得不同的 3D 构建,如图 3 所示,本次实验打印了最速降线与倾斜直线两种构件,拼装后完成最速降线的实验平台.小球选用能被磁性物质吸引的小铁球,利用磁铁实现同时释放小球的发射装置.



图3 最速降线 3D 打印实验装置实物图

将小球放置在发射台,抽离磁铁后,两个小球同时由静止沿斜面与曲面释放,在下滑过程中,可以清晰直观地从视频每一帧看到,相同时刻,沿着最速降线下落的小球先落到终点.

利用手机慢镜头录制实验视频,参数为 1 080 p/240 fps,将实验视频导入 Tracker 软件中进行轨迹追踪,图 4 不仅可以直观看到小球在不同轨道上的运动情况,还可以获取位置、速度随着时间的变化关系.收集相关实验数据导入 Origin 软件进行图像绘制与数据分析.

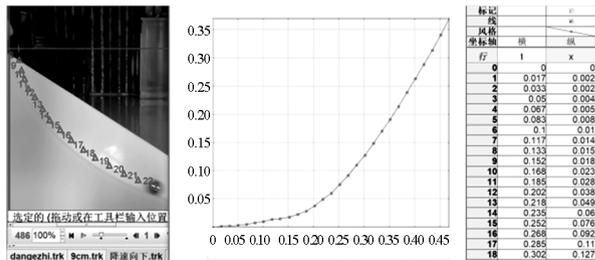


图 4 利用 Tracker 追踪小球沿斜面下滑轨迹

最速降线的探究过程从“提出问题—设计实验—收集数据—分析结论—评估反思”符合物理学科核心素养中科学探究的要求,鼓励学生能积极应用现代技术设计创造实验用具,通过计算机软件处理解决问题,体现物理学科与时俱进的时代性^[6],对学生今后的发展大有好处.

4 数据分析

本实验选用的小球质量为 0.16 kg,自制实验仪器的设计基于直径为 0.249 m 的圆上的一点,沿着直线前进产生的螺旋线参数方程.断开磁力装置,两个小球由静止开始,同时从倾斜轨道与最速降线轨道下滑,得到如图 5 所示的水平位移与时间的关系.

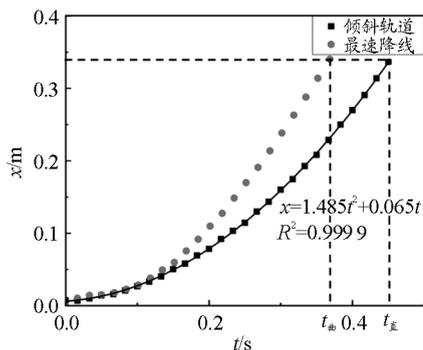


图 5 两球分别从倾斜轨道与最速降线轨道下滑的水平位移与时间的关系

根据图 5 可知,当两球在水平方向到达终点时, $t_{曲} < t_{直}$,说明小球沿着曲线下滑运动得更快.图像

中,对方点的拟合表示沿倾斜斜面轨道下滑的小球在水平方向上的分运动为匀加速直线运动,图像中的小圆点则描述了小球沿着最速降线下滑时的水平方向上的分位移随着时间变化的关系.相同的时间间隔内,小球在水平方向上的位移越来越大,即瞬时速度逐渐增大.表 1 为不同时刻,小球在两个轨道上的加速度比较.

表 1 不同时刻,小球在两个轨道上的加速度比较

时刻 / s	小球在倾斜直线轨道上的加速度 / (m · s ⁻²)	小球在最速降线轨道上的加速度 / (m · s ⁻²)
0.075	2.976 6	6.044 0
0.125	2.964 1	5.894 0
0.175	2.948 5	5.877 0
0.225	2.962 9	3.901 8
0.275	2.956 3	3.494 2

两球分别从倾斜轨道与最速降线轨道下滑的轨迹如图 6 所示.

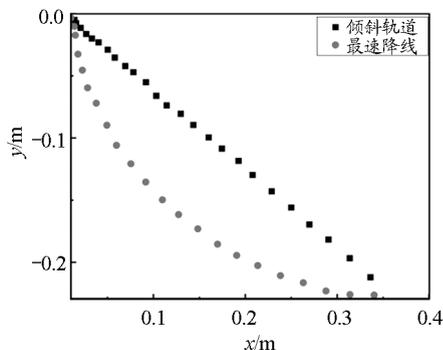


图 6 两球分别从倾斜轨道与最速降线轨道下滑的轨迹

表 1 对两段运动图像的斜率(运动的瞬时速度)进行计算,获得某一时刻的加速度.结合两者在图 6 中的运动轨迹可知:倾斜轨道上的小球做匀加速直线运动,运动过程中速度随着时间均匀增加,平均速度比最速降线小.而小球沿最速降线做加速曲线运动,加速度随着时间的增加而逐渐减小,在初始位置小球近乎垂直加速下落,让小球迅速加速获得快速通过后半程水平位移的能量,平均速度快,所以到达底部时间最短.

小球沿着最速降线的不同位置下落时的位移与时间数据如表 2 所示,图像如图 7 所示.

表2 小球沿着最速降线的不同位置
下落时的位移与时间

竖直方向 位移 / m	下落时间 实验值 / s	下落时间 理论值 / s	相对误差 / %
0.249	0.351	0.354 16	0.89
0.095	0.361		1.93
0.092	0.350		1.17
0.088	0.350		1.17
0.041	0.350		1.17

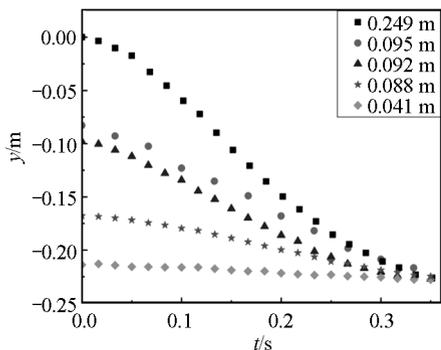


图7 小球沿着最速降线的不同位置下落时的位移-时间图像

根据表2与图7可知:当小球分别从最速降线0.041 m、0.088 m、0.092 m、0.095 m和0.249 m处下落时,小球到达底端的时间均接近0.35 s.将上海地区的重力加速度 $g=9.764 \text{ m/s}^2$ 与器材轨道的半径0.124 5 m代入公式(10)得小球下落时间的理论值,将实验值与理论值进行比对,相对误差均低于2%,考虑到Tracker软件读取信息时的频率,不能保证结束帧小球恰好落到轨道最低点,需要筛选数

据多次测量取平均值.从实验上证明,沿着最速降线的不同位置下落的物体,下落时间具有等时性.

5 结论

最速降线的应用已渗透在建筑、运动场地等领域,它的确立从提出问题,推理解释,科学论证到现代可以通过3D打印技术与计算机软件进行实验验证,人类对物体在重力作用下的最快速下落研究逐步深入,不仅能够得到螺旋线的参数方程,更能高精度地还原最速下落的运动过程,并能发现物体从不同位置沿最速降线下落具有等时性.

希望教师在教学过程中,能够时刻联系物理学科的时代意义,将更多的研究方式呈现给学生,给学生夯实基础,开拓视野,为科学思维与探究的培养建构平台.

参考文献

- [1] 徐雷.最速下降曲线实验[J].教育教学论坛,2018(4):190-191.
- [2] 师玉荣,马君,马丽珍.基于Matlab编程对最速降线问题的研究[J].物理与工程,2012,22(4):11-15.
- [3] 杨亦逸.最速降线问题的历史与一种巧解[J].物理通报,2021(8):151-155.
- [4] 贾小文,贺秀良,范海英.利用Igor Pro对最速降线问题进行数值求解[J].大学物理,2020,39(12):13-19,31.
- [5] 邢家省,杨义川,王拥军.最速降线问题的充分性[J].四川理工学院学报(自然科学版),2019,32(4):76-80.
- [6] 张金州.基于“STEM”理念下的“最速降线”探究[J].物理通报,2020(8):55-59.

Exploring the Brachistochrone Problem Based on 3D Printing and Trajectory Tracking

QIU Zhiyu XIAO Guina

(School of Mathematics and Physics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)

Abstract: SolidWorks software was used to establish the brachistochrone curve model, and the brachistochrone curve teaching aid was obtained through 3D printing technology. The relationship between trajectory and acceleration with time during the experiment was analyzed by Tracker software, and the images were analyzed to find that the acceleration decreased with the increase of time. And the time of motion of objects falling from different heights was investigated, which proved that the objects falling from different positions along the most rapid descent line had isochronism.

Key words: 3D printing; brachistochrone; Tracker; isochronism