

一类轴向均匀变化磁场中感生电场问题研究*

姜付锦

(武汉市黄陂区第一中学试题研究中心 湖北 武汉 430300)

韩 灿

(武汉市黄陂区第三中学 湖北 武汉 430300)

(收稿日期:2023-04-21)

摘要:先研究《电磁学(拓展篇)》中一道例题,纠正并完善原题中答案与解析,接着对矩形边界感生电场进行研究,最后对无穷大边界感生电场问题进行了一定程度的分析.

关键词:矩形边界;感生电场强度;数值模拟

1 感生电场强度

如图1所示,设磁场均匀增强 $\frac{\partial B}{\partial t}=k(k>0)$,点

$P(x,y)$ 感生电场强度两个分量分别为

$$\begin{cases} E_x(x,y) = \frac{k}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{y_1 - y}{r^2} dx_1 dy_1 \\ E_y(x,y) = \frac{k}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{x - x_1}{r^2} dx_1 dy_1 \end{cases} \quad (1)$$

式(1)是对边界内、外的区域都成立.

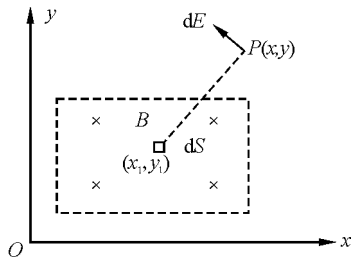


图1 变化的磁场产生感生电场

2 矩形边界

【题目】如图2所示,用均匀导线做成的正方形线框边长为0.2 m,正方形的一半放在垂直于纸面向里的匀强磁场中.当磁场以10 T/s的变化率增强时,线框a、b两点间的电势差是()

- A. $U_{ab} = 0.1 \text{ V}$
 B. $U_{ab} = -0.1 \text{ V}$
 C. $U_{ab} = 0.2 \text{ V}$
 D. $U_{ab} = -0.2 \text{ V}$

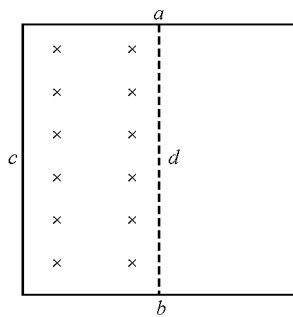


图2 题目附图

2.1 文献1中的分析

对左边半电路(acb 段)使用“含源支路欧姆定律”,有

$$E_{acb} = U_{ba} + \frac{1}{2}IR \quad (2)$$

其中 E_{acb} 代表 acb 段的感生电动势(绝对值), I 、 R 分别代表线框电流(绝对值)和电阻.由已知条件得线框面积 $S=0.04 \text{ m}^2$,故全线框感生电动势(绝对值)

$$E = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = S \left| \frac{dB}{dt} \right| = 0.04 \times 10 \text{ V} = 0.4 \text{ V} \quad (3)$$

由全电路欧姆定律 $E=IR$,则式(2)变为

$$U_{ab} = -E_{acb} + \frac{1}{2}E \quad (4)$$

注意到 E_{acb} 是全线框感生电动势 E 的一部分,暂令 $E_{acb} = \beta E$ (其中 $0 < \beta \leq 1$),代入式(4)得

$$U_{ab} = \left(\frac{1}{2} - \beta \right) E = \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \times 0.4 \text{ V} \quad (5)$$

本题只能做到这一步,关键是出题人并未给出

* 2021年武汉市教育科学规划重点课题“基于新课程标准的高中情境化命题实践研究”研究成果,课题编号:2021A051.

β 值,而且从图2无法知道感生电场在线框内如何分布,从而无法得知 β 值,故原题没有答案正确^[1].

2.2 对参考文献[1]分析的反思

式(3)中有效面积应该是 $\frac{S}{2}$,所以式(5)应该是

$$U_{ab} = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)E = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \times 0.2 \text{ V} \quad (6)$$

β 值到底是多少呢?

设矩形区域 $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, a=0.05 \text{ m}, b=0.1 \text{ m}, k=10 \text{ T/s}$,则式(1)积分变为

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \\ \frac{k}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y_1 - y}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} dy_1 dx_1 \\ E_y(x, y) &= \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{k}{2\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{x - x_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} dx_1 dy_1$$

则 acb 边产生电动势占总电动势比值为

$$\begin{aligned} & \left[2 \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y_1 - b}{(x - x_1)^2 + (b - y_1)^2} dy_1 dx_1 \right) dx + \right. \\ & \left. \int_b^{-b} \left(\int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{a - x_1}{(a - x_1)^2 + (y - y_1)^2} dx_1 dy_1 \right) dy \right] \frac{k}{2\pi} \cdot \\ & \left\{ \left[\int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y_1 - b}{(x - x_1)^2 + (b - y_1)^2} dy_1 dx_1 \right) dx + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_b^{-b} \left(\int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{a - x_1}{(a - x_1)^2 + (y - y_1)^2} dx_1 dy_1 \right) dy \right] \frac{k}{2\pi} \cdot \right. \\ & \left. 2I \right\}^{-1} \approx 0.676 106 718 2 \end{aligned}$$

β 比值大约为 0.676 1,代入式(6)得

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)E \approx \\ & \left(\frac{1}{2} - 0.676 1\right) \times 0.4 \text{ V} \approx -0.07 \text{ V} \quad (8) \end{aligned}$$

故原题没有选项正确.

2.3 a, b 两点间的电势差另一种算法

对右半边电路(ab 段)使用“含源支路欧姆定律”,有

$$E_{ba} = U_{ab} + \frac{1}{2}IR \quad (9)$$

其中 E_{ba} 代表 ab 段的感生电动势(绝对值), I, R 分别代表线框电流(绝对值)和电阻.由已知条件得线框面积 $S=0.04 \text{ m}^2$,故全线框感生电动势(绝对值)

$$E = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{S}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| = 0.2 \text{ V} \quad (10)$$

由全电路欧姆定律 $E = IR$,则式(10)变为

$$U_{ab} = E_{ba} - \frac{1}{2}E \quad (11)$$

注意到 E_{ba} 是全线框感生电动势 E 的一部分,暂令 $E_{ba} = \alpha E$ (其中 $0 < \alpha \leq 1$),代入式(4)得

$$U_{ab} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)E = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \times 0.2 \text{ V} \quad (12)$$

由式(7)可得 ab 边电动势的占比

$$\begin{aligned} & \left[\int_b^{-b} \left(\int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{a - x_1}{(a - x_1)^2 + (y - y_1)^2} dx_1 dy_1 \right) dy \right] \frac{k}{2\pi} \cdot \\ & \left\{ \left[\int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y_1 - b}{(x - x_1)^2 + (b - y_1)^2} dy_1 dx_1 \right) dx + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_b^{-b} \left(\int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{a - x_1}{(a - x_1)^2 + (y - y_1)^2} dx_1 dy_1 \right) dy \right] \frac{k}{2\pi} \cdot \right. \\ & \left. 2 \right\}^{-1} \approx 0.323 893 281 6 \end{aligned}$$

α 比值大约为 0.323 9,代入式(12)得

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)E \approx \\ & (0.323 9 - 0.5) \times 0.2 \text{ V} \approx -0.07 \text{ V} \quad (13) \end{aligned}$$

对比式(8)、(13)发现 $\alpha + \beta = 1$,这与理论分析相吻合,因此以上分析方法与思想没有问题.但在非静电场(保守场)中,电场沿回路的积分与积分路径有关,所谓的电势(差)是没有物理意义的^[2].因此在高中阶段应尽量避免计算感生电场中电势差的问题.

3 无穷大边界感生电场

3.1 由圆柱形边界推导

如图3所示,设磁场分布在半径为 R 的圆形区域内,把正方形线框变形为扇形闭合回路——上下两边沿磁场圆夹角为 α 的两条半径方向,左右两边分别沿半径为 $(R - \frac{L}{2})$ 与 $(R + \frac{L}{2})$ 的两个圆的圆弧方向.设左右两边产生的感应电动势分别为 E_1, E_2 ,则左边圆弧上感应电动势为

$$E_1 = k \cdot \frac{1}{2}\alpha \left(R - \frac{L}{2}\right)^2 \quad (14)$$

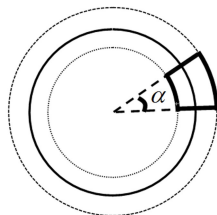


图3 扇形电路

右边圆弧上感应电动势为

$$E_2 = k \cdot \frac{1}{2} \alpha R^2 \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{L}{R} \quad (16)$$

由式(14)~(16)可得回路中总感应电动势为

$$E = E_2 - E_1 = k \cdot \frac{1}{2} \left(L^2 - \frac{L^3}{4R} \right) \quad (17)$$

若圆柱半径趋近于无穷大,图4中扇形闭合回路趋近正方形,式(14)、(15)均会趋近于无穷大,式(17)会趋近于

$$E \rightarrow \frac{1}{2} k L^2 \quad (18)$$

两个扇形边所在位置感生电场强度分别为

$$\begin{cases} E_{\text{感}1} = \frac{E_1}{\frac{1}{2} \alpha \left(R - \frac{L}{2} \right)} = k \left(R - \frac{L}{2} \right) \\ E_{\text{感}2} = \frac{E_2}{\frac{1}{2} \alpha R} = kR \end{cases} \quad (19)$$

当圆柱半径趋近于无穷大时,矩形左右两边感生电场强度和总感生电场强度都趋近于无穷大,但它们差值有限.之所以会出现这种情况主要是因为感生电场强度严格依赖磁场边界.若磁场边界有限,则空间感生电场强度有限.若磁场边界趋近无穷大,则空间感生电场强度趋近无穷大.

3.2 参考文献[3]分析

如图4所示,建立坐标系 xOy ,取水平向左为 x 轴正方向, y 轴为半无穷大边界,则通过理论分析得空间感生电场分布如下^[2]

$$E_x = 0 \quad E_y = \frac{k}{2} [-x + x \text{sign}(-x)] \quad (20)$$

其中

$$\text{sign}(-x) = \begin{cases} -1 & (x > 0) \\ +1 & (x < 0) \end{cases}$$

式(20)表明:

当 $x > 0$ 时,感生电场为 $E_x = 0, E_y = -kx$,感生电场沿 y 轴方向.

当 $x < 0$ 时, $E = 0$,即在磁场边界及外部空间没有感生电场,感生电场只分布在边界内部.

边界内部感生电场强度方向与 y 轴平行,大小与 x 成正比,在 x 轴上感生电场强度为零.这与参考文献[4]中理论——“越接近边界感生电场越强”和

“在边界外也有感生电场”矛盾,也与式(19)矛盾,故参考文献[3]中关于无限大边界感生电场问题的分析有待商榷.

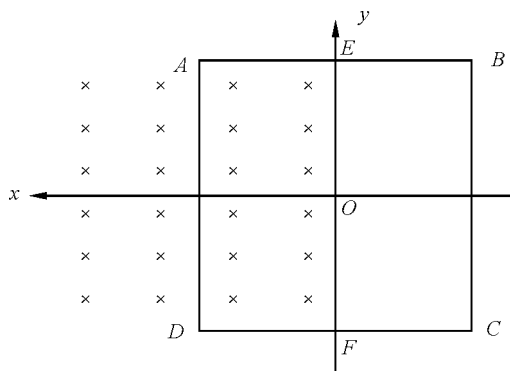


图4 参考文献[3]中的分析

3.3 无穷大感生电场的另一种理解

无穷大边界的磁场区域实际上是不能实现的,但可以逼近.举个例子,一个很小的蚂蚁靠近一个均匀带有电荷的平板,蚂蚁距离平板越近,它看到的平板就越大,感受到的就是无穷大带电平板所产生的电场.所以,考虑一个有限大小正方形的磁场区域,要讨论感生电场趋向边界处的近似渐近行为,分从里面逼近和从外面逼近.解析公式给不出的话,可以数值计算讨论.也可以从最简单的圆形区域磁场开始讨论.

4 结束语

通过以上分析不难发现,感生电场分布图与变化磁场边界紧密相关,若磁场边界确定则感生电场分布就确定,在边界上某处感生电场强度有最大值,但边界不一定是电场强度等值线;当边界趋近无穷大时,边界处感生电场强度趋近于无穷大,但这在真实物理情境中是不允许的,故在高中阶段尽量不要出现无穷大边界的感生电场问题.

参考文献

- [1] 梁灿彬,曹周键,陈陟陶.电磁学(拓展篇)[M].北京:高等教育出版社,2018:249-250.
- [2] 赵坚.对涡旋电场中所谓“引入”电势、电势差概念问题的讨论[J].物理教师,2009(10):6-7.
- [3] 桑芝芳.导体回路中感应电动势是如何分布的[J].物理通报,2010(2):8-11.
- [4] 王莱.截面异形的轴向变化磁场中产生的感生电场[J].大学物理,2005(4):51-54.