

# 多次弹性正碰的全过程中速度交换的分析

肖星星 郭安良 陈杨

(重庆市第八中学校 重庆 400030)

(收稿日期:2023-04-23)

**摘要:**动量、能量知识贯穿整个物理学的学习,也是分析、解决物理问题的一条重要途径和重要的思维方法,对思维能力要求比较高.从动量、能量角度出发,探讨了在弹性碰撞过程中的速度交换问题,建立了在多次弹性碰撞过程中的速度交换模型,并分析了该模型的局限性和适应性.

**关键词:**学科素养;动量能量;弹性碰撞;速度交换;多碰撞过程模型

学科核心素养是学科育人的价值体现,是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观、必备品格和关键能力.物理学科核心素养中的科学思维主要包括模型的构建、科学推理、科学论证、质疑创新等要素<sup>[1]</sup>.在物理学中两粒子或物体经过极短时间的相互作用,导致碰撞前后参与物的速度、动量或者能量发生变化,按碰撞过程中机械能是否守恒分为弹性碰撞和非弹性碰撞两种,如果碰撞过程中没有机械能的损失称为弹性碰撞,有机械能的损耗称为非弹性碰撞,本文重点讨论弹性碰撞过程中速度交换问题.

## 1 弹性碰撞

### 1.1 双守恒方程

两物体 P 和 Q 质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ,碰前两物体的速度分别为  $v_{10}$ 、 $v_{20}$ ,碰后的速度为  $v_1$ 、 $v_2$ ,由弹性碰撞动量、机械能守恒得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

由式(1)得

$$m_1(v_{10} - v_1) = m_2(v_2 - v_{20}) \quad (3)$$

由式(2)得

$$m_1(v_{10} + v_1)(v_{10} - v_1) = m_2(v_2 + v_{20})(v_2 - v_{20}) \quad (4)$$

由式(4)除以式(3)得

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20} \quad (5)$$

式(4)、(5)联立解得

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20}$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{20} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

### 1.2 恢复系数

将两物体碰撞后的分离速度( $v_2 - v_1$ )与碰撞前两物体的接近速度( $v_{10} - v_{20}$ )比值叫恢复系数,用公式表示为

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

$e$ 由两物体的材料性质决定,与两物体的质量无关.对于弹性碰撞  $e = 1$ [上面的式(5)],完全非弹性碰撞  $e = 0$ ,一般碰撞  $0 < e < 1$ <sup>[2]</sup>.

## 2 速度交换

### 2.1 一次弹性碰撞过程中的速率交换

由上面的推导可以看出,如果  $m_2 = m_1$ ,则  $v_1 = v_{20}$ ,  $v_2 = v_{10}$ ,即碰后两物体速度交换.

### 2.2 多次弹性碰撞过程中的速度交换

#### 2.2.1 模型的建立

如图1所示,在粗糙的水平地面左边有一固定弹性挡板(弹性挡板也可以换成固定光滑斜面或凹槽),地面上有 P、Q 两个物体,质量分别为  $m$ 、 $M$ ,且

$m < M$ , Q 静止. 某时刻 P 以  $v_{10}$  的速度与 Q 发生弹性碰撞. Q 与水平面的动摩擦因数为  $\mu$ , 设最大静摩擦力等于滑动摩擦力. P 与地面间没有摩擦, 与挡板之间的碰撞无动能损失. 两物体可以看作质点, 水平地面足够长, Q 的速度减为零之前 P 不会与之碰撞.

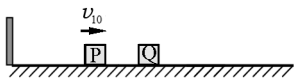


图1 多次弹性碰撞的物体

### 2.2.2 模型分析

由于弹性碰撞, 满足双守恒方程, 设第一次碰撞后 P、Q 的速度大小分别为  $v_{11}$  和  $v_{21}$ , 由上面的推导可得

$$v_{11} = \frac{M-m}{m+M}v_{10}$$

$$v_{21} = \frac{2m}{m+M}v_{10}$$

Q 以  $v_{21}$  的速度向前滑行直到速度减为零, P 碰后速度反向, 与弹性挡板碰撞后原速反弹, 又以  $v_{11}$  速率去碰静止的 Q 物体, 依次循环. 相当于 P 物体以碰后的速度在弹性挡板的作用下不停地朝着同一方向撞击 Q 物体, 弹性挡板的作用相当于控制 P、Q 两物体在两次碰撞过程中的时间差. 由于每次碰后 P 物体速度大小会减小, 最终两物体都会停止运动. 由上面的分析可得第二次碰后的速度大小为

$$v_{12} = \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2 v_{10}$$

$$v_{22} = \frac{2m}{m+M} \frac{M-m}{m+M} v_{10}$$

第三次碰后的速度大小为

$$v_{13} = \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^3 v_{10}$$

$$v_{23} = \frac{2m}{m+M} \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2 v_{10}$$

第  $n$  次碰后的速度大小为

$$v_{1n} = \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^n v_{10}$$

$$v_{2n} = \frac{2m}{m+M} \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^{n-1} v_{10}$$

### 2.2.3 模型结论

P 物体在多次弹性碰撞过程中减小的速度等于

Q 物体在整个碰撞过程中增加的速度, 即速度交换. 为了证明此模型结论的正确性, 从两个角度进行证明.

#### (1) 直接求解

根据每次碰撞后的情况直接算出 Q 物体最终获得的速度总和  $v_2$

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{21} + v_{22} + v_{23} + \cdots + v_{2n} = \\ &= \frac{2m}{m+M}v_{10} + \frac{2m}{m+M} \frac{M-m}{m+M}v_{10} + \\ &\quad \cdots + \frac{2m}{m+M} \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^{n-1} v_{10} = \\ &= \frac{2m}{m+M}v_{10} \left[1 + \frac{M-m}{m+M} + \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^{n-1}\right] = \\ &= \frac{2m}{m+M}v_{10} \frac{1}{1 - \frac{M-m}{m+M}} = v_{10} \end{aligned}$$

即 P 物体在与弹性挡板和 Q 物体的多次弹性碰撞过程中, 最终将速度全部传给了 Q 物体, 速度交换, 结论成立.

#### (2) 利用恢复系数

由于碰前 Q 物体停止运动

$$v_{20} = 0 \quad e = \frac{v_{2n} + v_{1n}}{v_{1n-1}} = 1$$

则

$$v_{2n} = v_{1n-1} - v_{1n}$$

即在每次的碰撞过程中, P 物体的速度减小量等于 Q 物体的速度增加量, 其中  $v_{1(n-1)}$  为 P 物体第  $n$  次碰撞前的速度大小,  $v_{1n}$ 、 $v_{2n}$  为 P、Q 两物体  $n$  次碰撞后的速度大小.

第一次碰撞后 P、Q 的速度大小分别为  $v_{11}$  和  $v_{21}$ , 可得

$$v_{21} = v_{10} - v_{11}$$

同理可求得第二次碰后的速度大小关系为

$$v_{22} = v_{11} - v_{12}$$

第三次碰后的速度大小关系为

$$v_{23} = v_{12} - v_{13}$$

第  $n$  次碰后的速度大小关系为

$$v_{2n} = v_{1(n-1)} - v_{1n}$$

最终解物体 Q 获得的速度总和

$$v_2 = v_{21} + v_{22} + \cdots + v_{2n} = (v_{10} - v_{11}) + (v_{11} - v_{12}) + \cdots + [v_{1(n-1)} - v_{1n}] = v_{10}$$

结果发现,每次 P 物体与静止的 Q 物体发生弹性碰撞,P 物体的速度减小量等于 Q 物体的速度增加量,即  $-\Delta v_1 = \Delta v_2$ . 多次碰撞后,P、Q 两物体最终都停止运动,那么 P 物体总的速度减小量等于 Q 物体总的速度增加量,结论成立.

### 3 模型的局限性

多次弹性碰撞过程中速度交换模型的条件:

(1) 每次碰撞都是弹性碰撞,且都是小物体去碰静止的大物体.

(2) 由于弹性挡板(斜面或凹槽)的作用,每次碰前小物体的速度大小都是上一次碰后的速度大小.

### 4 模型的适应性

由于模型条件的限制,主要有两个考查方向.

#### 4.1 求时间

在图 1 的情景中,如果重力加速度大小为  $g$ ,则 Q 物体整个运动情景相当于初速度为  $v_{10}$ 、加速度大小为  $\mu g$  的匀减速直线运动,则运动的总时间  $t =$

$\frac{v_{10}}{\mu g}$ ,这种方法比用分段等比数列求解简单得多,使

问题得到极大的简化.

#### 4.2 求位移

在图 1 的情景中,将地面换成 U 型光滑金属导轨,垂直于导轨方向有匀强磁场,将 P、Q 物体换成金属杆和绝缘杆,相当于将 Q 物体所受的摩擦阻力换成电磁阻力,就变成了 2023 年重庆高三二诊物理第 15 题.

##### 4.2.1 原题呈现

如图 2 所示,等间距的两光滑金属导轨由足够长的水平导轨和倾斜直轨在 PQ 处平滑连接组成. PQ 与导轨垂直,导轨间距为  $L$ ,水平直轨在同一水平面内,处于磁感应强度大小为  $B$ 、方向竖直向上的匀强磁场中. 水平直轨左侧有直流电源、电容为  $C$  的

电容器和定值电阻  $R$ ,长度为  $L$ 、质量为  $2m$ 、电阻为  $2R$  的金属棒 M 静置在水平直轨上,金属棒 M 距电阻  $R$  足够远,质量为  $m$  的绝缘棒 N 被控制静置直轨上,绝缘棒 N 距水平轨道高度为  $h$ ,不计金属导轨电阻. 开始时,开关  $S_2$  断开,将单刀双掷开关  $S_1$  接“1”,使电容器完全充电,然后  $S_1$  接“2”,金属棒 M 从静止开始加速运动至稳定速度后,当金属棒 M 到 PQ 的距离为  $d$  时, $S_1$  立即与“2”断开、同时闭合  $S_2$ ,金属棒 M 运动至 PQ 处时,恰好与从倾斜直轨上由静止开始自由下滑的绝缘棒 N 在 PQ 处发生弹性碰撞,碰撞时间极短可不计,随后绝缘棒 N 能在倾斜直轨上到达的最大高度为  $\frac{25}{9}h$ . 已知以后绝缘棒 N 与金属棒 M 每次再发生碰撞时金属棒 M 均已停止运动,所有碰撞均为弹性碰撞,整个过程中,M、N 始终与轨道垂直并接触良好,两棒粗细不计,重力加速度为  $g$ . 求:发生第 1 次碰撞后到最终两棒都停止运动的全过程中,金属棒 M 的位移大小.

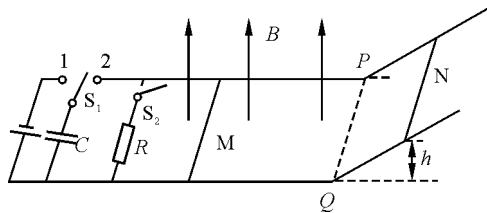


图 2 原题题图

##### 4.2.2 例题分析

试题有 3 问,这里去掉了(1)、(2)问,重点分析第(3)问. 仔细研读题目,发现 M 杆第一次运动停止后的运动情况与这里讨论的速度交换模型一模一样. 因此,由模型可知:M 杆在碰撞过程中获得的速度之和为 N 杆第一次碰后的速度  $v$ ,相当于 M 杆仅在安培力作用下由速度  $v$  减为零,对于 M 杆,由动量定理列方程

$$-\frac{B^2 L^2 v}{R_{\text{总}}} \Delta t = -M \Delta v$$

其中  $x = v \Delta t$ ,然后全过程累加有

$$\frac{B^2 L^2 x}{R_{\text{总}}} = Mv$$

求得

$$x = \frac{MvR_{\text{总}}}{B^2L^2}$$

由题目分析可知

$$R_{\text{总}} = 3R \quad v = \frac{5}{3}\sqrt{2gR}$$

代入,得

$$x = \frac{10mR\sqrt{2gR}}{B^2L^2}$$

再加上 M 杆第一次碰后运动到停止的位移

$$x' = \frac{2mR\sqrt{2gR}}{B^2L^2}$$

就求出了 M 杆的总位移

$$x_{\text{总}} = \frac{12mR\sqrt{2gR}}{B^2L^2}$$

题目也就很快得到解决.

(上接第 116 页)

默认两分运动互相垂直(此时  $\alpha=0^\circ$ ),且蜡块在沿管方向上做匀速直线运动,在水平方向上做匀加速直线运动.首先,保持原默认数值,将蜡块水平加速度  $a_x$  设为 0.3;然后,选中全部标签,设置点 S 显示轨迹;最后,点击开始按钮,进行动画展示,如图 8 所示.

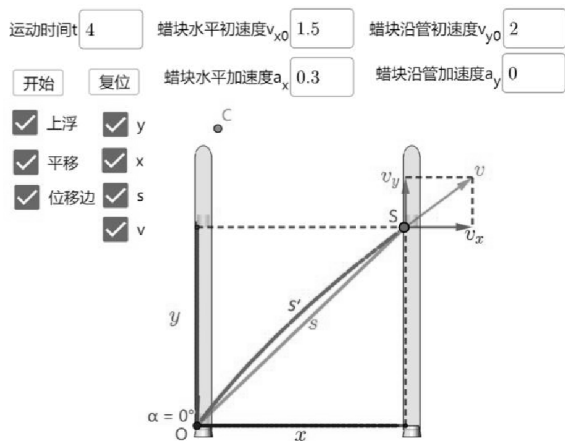


图 8 匀速直线运动和匀变速直线运动合成展示

由图 8 可知蜡块实际运动轨迹  $s'$  与位移  $s$  不重合,结合理论分析可知一个匀速直线运动和一个匀变速直线运动的合运动为匀变速曲线运动,轨迹弯向物体的加速度方向.

## 5 结束语

动量、能量在物理学中的地位非常重要,也是物理学习的重点和难点,两者经常结合在一起考查,思维难度特别大,对物理的学科素养要求比较高.通过对弹性碰撞进行深度解读,建立一个多次弹性碰撞过程中的速度交换模型,并对该模型进行有效性论证、局限性讨论和适用范围进行解读,最后通过 2023 年重庆高三二诊物理 15 题验证了此模型的正确性.

## 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 范小辉. 新编高中物理奥赛指导[M]. 南京:南京师范大学出版社,2011.

## 4 总结

本文利用 GeoGebra 的动态演示功能,开发了一个动态模拟“蜡块的运动”演示实验的课件,能够实现蜡块运动过程的可视化.在此基础上,通过全参数可调来探究互成角度的两直线运动的合运动性质与轨迹.另外,课件还可用于探究速度、加速度的变化对蜡块实际运动轨迹的影响.

GeoGebra 功能强大,应用范围非常广泛,正版免费,不需要编程基础,简单易学,做出的课件对教学难点的破解作用很大<sup>[3]</sup>.通过本课件的开发,希望能为一线教师同仁提供一些教学参考,同时也可以根据自身需要对本课件进行二次开发拓展,制作出更加优秀的课件服务教学.

## 参考文献

- [1] 陈林,桑芝芳. 基于 GeoGebra 对两道动态平衡问题的深入思考[J]. 中学物理教学参考,2020,49(9):45-47.
- [2] 人民教育出版社,课程教材研究所,物理课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 物理 必修 第二册[M]. 北京:人民教育出版社,2019:6.
- [3] 陈林,桑芝芳. GeoGebra 在高中物理教学中的应用——以“共点力动态平衡”为例[J]. 物理之友,2020,36(4):13-15.