# 对一个常见球杆模型的课堂讨论

张利国　胡光涛
（北京交通大学附属中学　北京　100081）
李　璐
（中国船舶集团有限公司综合技术经济研究院　北京　100081）

（收稿日期：2023－04－27）

**摘　要**：在处理一个典型的球杆模型问题时，通常应用系统机械能守恒定律或质点系动能定理进行求解，但总有学生试图用质心动能定理进行求解，发现得到的答案和常规解法不同，为了解决学生的困惑，我们进行了细致的课堂讨论.

**关键词**：动能定理；质点；质点系；质心

## 1　问题的提出

**【原题】**如图 1 所示，一根轻质细杆的两端分别固定着 $A$、$B$ 两只质量均为 $m$ 的小球，$O$ 点是一光滑水平轴，已知 $AO=r$，$BO=2r$，使细杆从水平位置由静止开始转动，求当杆转到竖直位置时 $A$、$B$ 两球的速度？

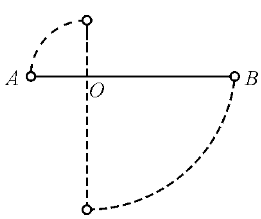


图 1　原题题图

### 1.1　常规解法

根据质点系动能定理，有

$$mg\cdot 2r-mgr=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2 \tag{1}$$

$$v_B=2v_A \tag{2}$$

将式(1)、(2) 联立，解得

$$v_A=\sqrt{\frac{2}{5}gr}\qquad v_B=2\sqrt{\frac{2}{5}gr}$$

### 1.2　学生提出了质心解法

质心 $C$ 位于 $O$ 点右侧 $0.5r$ 处，对质心列动能定理方程有

$$2mg\cdot 0.5r=\frac{1}{2}\cdot 2mv_C^2 \tag{3}$$

由式(3) 得

$$v_C=\sqrt{gr}$$

两球角速度相同，根据线速度和角速度之间的关系式 $v=\omega r$，解得

$$v_A=2v_C=2\sqrt{gr}$$

$$v_B=4v_C=4\sqrt{gr}$$

两种求解方式所求得 $v_A$、$v_B$ 的值不同，这种质心求解的方法错在哪儿了？

## 2　问题的解决

### 2.1　对学生提出的质心解法进行修正

我们把式(3) 的右侧再加上 $A$、$B$ 两球相对质心的动能，换成下面的式子

$$2mg\cdot 0.5r=\frac{1}{2}\cdot 2mv_C^2+\frac{1}{2}m(\Delta v_A)^2+\frac{1}{2}m(\Delta v_B)^2 \tag{4}$$

其中 $\Delta v_A$、$\Delta v_B$ 分别表示 $A$、$B$ 两球相对于质心的速度，有

$$\Delta v_A=v_A-v_C\qquad \Delta v_B=v_B-v_C$$

考虑到

$$v_A=-\omega r\qquad v_B=+\omega\cdot 2r\qquad v_C=+\omega\cdot\frac{1}{2}r$$

代入式(4)，解得

$$\omega=\sqrt{\frac{2}{5}\frac{g}{r}}\qquad v_A=-\sqrt{\frac{2}{5}gr}$$

$$v_B=2\sqrt{\frac{2}{5}gr}\qquad v_C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}gr}$$

为什么修正之后得到 $v_A$、$v_B$ 的值和常规解法相同呢？我们需要了解以下的概念和规律.

## 2.2 对修正的解释

首先，我们需要明确什么是质心，由质心的定义[1]，质心 $C$ 的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

转为速度的形式，有

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

变形，有

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{v}_i)-\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{v}_C)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_C)=0$$

令 $\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_C=\Delta\boldsymbol{v}_i$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\boldsymbol{v}_i=0 \tag{5}$$

其次，我们需要引入柯尼希定理，内容为：质点系的动能等于质心动能与相对质心运动的动能之和. 证明过程如下.

$$E_{\mathrm{k}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(|\boldsymbol{v}_C+\Delta\boldsymbol{v}_i|)^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i[v_C^2+(|\Delta\boldsymbol{v}_i|)^2]+\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_C\cdot\Delta\boldsymbol{v}_i=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_C^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\Delta v_i)^2+\boldsymbol{v}_C\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\boldsymbol{v}_i$$

由于 $C$ 为质心，由式(5)知各质元相对质心 $C$ 的动量增量矢量和为零，即有

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\boldsymbol{v}_i=0$$

得证

$$E_{\mathrm{k}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_C^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\Delta v_i)^2$$

到此为止，已经可以解释我们为什么要在等式右侧加上 $A$、$B$ 两球相对质心的动能. 似乎问题解决了，但学生又提出了新问题：难道不存在质心动能定理吗？

# 3 问题的引申

## 3.1 质心动能定理的推导

根据质点系质心运动定理，有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$ 为质点系所受外力的矢量和.

等式两边点乘质心位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$，有[2]

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C=$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C=$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_C\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_C{}^2\right)$$

可见，质心动能定理是成立的.

学生们用的就是质心动能定理，式(3)错在哪儿呢？

式(3)错在求合外力在质心位移上的功时，仅仅考虑了重力做功，外力考虑不全. 如果把 $A$、$B$ 两球看成系统，除了考虑重力外，还需要考虑杆对质点系的合力是否为零；如果把杆与 $A$、$B$ 两球看成系统，则还需要考虑转轴对系统的合力做功.

我们应在左侧加上除重力之外的力在质心位移上做功，把式(3)改为

$$2mg\cdot0.5r+W_{\text{除重力之外的力}}=\frac{1}{2}\cdot2mv_C^2 \tag{6}$$

即除了考虑到 $W_G=2mg\cdot0.5r$ 之外，还应该考虑到 $W_{\text{除重力之外的力}}=-\frac{9}{10}mgr$，即可得出正确答案.

## 3.2 应用质点系动能定理求解

在应用质点系动能定理列式(1)时，为什么没有考虑杆对质点系做功？

如图 2 所示，取转动过程中的任意一段极短时间 $\Delta t$，设杆对 $A$、$B$ 两球的切向分力分别为 $F_A$、$F_B$，设时间 $\Delta t$ 内 $A$、$B$ 两球转过的弧长分别为 $l_A$、$l_B$.

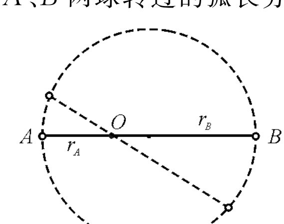


图 2 小球在重力和杆的切向分力作用下转动

对轻杆在任意时刻均有力矩平衡，即

$$F_A r_A = F_B r_B$$

杆对 $A$ 球做功

$$W_A = F_A l_A = F_A r_A \omega \Delta t$$

杆对 $B$ 球做功

$$W_B = -F_B l_B = -F_B r_B \omega \Delta t$$

考虑到两球角速度 $\omega$ 相同，可知杆对 $A$、$B$ 两球做功代数和为零，可见在任意一段极短时间 $\Delta t$ 内，只有重力对质点系做功，杆对 $A$、$B$ 两球组成的质点系不做功.

## 4　问题的深入

### 4.1　杆对两球的切向力

刚体对定轴的转动惯量[3] $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$，具体到本题为

$$I = 5mr^2$$

假设杆从水平位置转过 $\theta$ 角，根据转动定理 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = I\boldsymbol{\beta}$，刚体对定轴的合力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于对应转动惯量 $I$ 与角加速度 $\boldsymbol{\beta}$ 的乘积，取顺时针转动力矩为正，有

$$mg \cdot 2r\cos\theta - mgr\cos\theta = 5mr^2\beta$$

$$\beta = \frac{g\cos\theta}{5r}$$

两球角加速度相同，利用切向加速度和角加速度之间的关系式 $a = \beta r$，解得

$$a_A = \frac{g\cos\theta}{5} \qquad a_B = \frac{2g\cos\theta}{5}$$

利用牛顿第二定律对 $A$、$B$ 两球在切向上列方程，有

$$F_A - mg\cos\theta = ma_A$$

$$mg\cos\theta - F_B = ma_B$$

解得

$$F_A = \frac{6}{5}mg\cos\theta$$

$$F_B = \frac{3}{5}mg\cos\theta$$

方向均垂直于杆向上.

### 4.2　杆对两球做功情况

$$W_A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_A r \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{6}{5}mgr\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{6}{5}mgr$$

$$W_B = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_B \cdot 2r\mathrm{d}\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{5}mg \cdot 2r\cos\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{6}{5}mgr$$

$$W_A + W_B = 0$$

杆对 $A$、$B$ 两球组成的质点系不做功，这就是我们在式(1)中仅考虑重力做功的原因.

### 4.3　杆对两球的质心做功情况

$$W_C = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (F_A + F_B)\frac{r}{2}\mathrm{d}\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{5}mg \cdot \frac{1}{2}r\cos\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{9}{10}mgr$$

这就是我们在式(6)中需要考虑除重力之外的力做功的原因.

有些学生会好奇，为什么我们只考虑切向分力，而不考虑法向分力，是因为无论对小球，还是对质心，法向分力均不做功.

在应用动能定理时，要把研究对象区分为质点和质点系，要考虑到动能定理分为质点动能定理、质点系动能定理、质心动能定理和相对动能定理，其关系如表 1 所示. 对质点系列动能定理方程的时候，不仅要考虑到内力做功的问题，还要全面考虑到所有外力做功. 如果进一步扩展的话，我们会发现，牛顿定律、动量定理也要做类似区分.

**表 1　各动能定理与对应的功**

| | 内力 $f$ 做功 | 外力 $F$ 做功 | 动能增量 |
|---|---|---|---|
| 质点系动能定理 | $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{r}_i$ | $+\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i$ | $=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$ |
| | = | = | = |
| 质心动能定理 | $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{r}_C$ | $+\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_C$ | $=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_C^2$ |
| | + | + | + |
| 相对动能定理 | $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i$ | $+\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i$ | $=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\Delta v_i)^2$ |

## 参 考 文 献

[1] 赵凯华，罗蔚茵. 新概念物理教程·力学[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2004：127.

[2] 汤幼强，黄亦斌. 质心动能定理与相对动能定理[J]. 物理通报，2021(7)：36－38.

[3] 漆安慎，杜婵英. 普通物理学教程·力学[M]. 北京：高等教育出版社，1997：203.