

# 均匀导热球热导率的电像法求解思想及应用

李子涵 李智华

(华中科技大学物理学院 湖北 武汉 430070)

(收稿日期:2023-05-25)

**摘要:**类比是物理学中常见的思想,不同类型的问题如果有形式相似但只是系数不同的方程,一般来说二者可以通过类比来相互求解.热传导作为不可逆过程热力学的问题,其研究方法较为有限,而大多方法又依赖求解繁琐的数学物理方程.笔者基于求解均匀导热球热导率的问题,将热流场与静电场进行类比,通过电像法构造出内部的热流线与温度分布,理论计算的结果与COMSOL仿真模拟结果符合较好.最后,还分析了电像法求解热传导问题在生命科学研究中可能的潜在应用.

**关键词:**热传导;热流场;电像法;静电场

## 1 前言

全空间无源定态热传导方程和无体电荷分布的静电场基本方程,二者分别为关于温度和电势的拉普拉斯方程.数学上可以证明,如果拉普拉斯方程有着相同的边界条件,则所有该类方程的解均相同<sup>[1]</sup>.对于复杂的热传导问题,可以间接地通过求解类似静电学的问题来解决.静电学问题的求解方法有很多,较为常见的有分离变量法解拉普拉斯方程,调和函数求解格林函数法,复势的保角变换法,电像法等,而对于具有高度对称性的问题,要首先考虑电像法的适用性.本文基于求解均匀导热球热导率的问题,根据电像法巧妙构造出导热球内部热流线的分布和温度分布,从而较为精确地给出了热导率的理论计算公式<sup>[2]</sup>.相比于直接求解热传导对应的偏微分方程,电像法的类比求解较为高效,因此对于生命科学中快速判断生物组织病变部位有一定的贡献.

## 2 问题的引入

1822年,法国著名科学家傅里叶提出了传热学中的热传导定律,即在热流场中,单位时间通过单位面积的热量正比于该处的温度梯度,写成数学表达式为

$$\mathbf{J} = -\kappa \nabla T \quad (1)$$

其中比例系数 $\kappa$ 为传热材料的热导率.对于表面或内部有热源存在的材料,可以通过热流守恒求得其热导率.

考虑放置于真空中的一个均匀导热球,假设其不会与周围环境发生各种形式的热交换,即对其表面进行绝热近似,通过实验模拟的方法,求出该导热球的热导率.

取导热球的任一直径,在两端接上棒状导热探头.调节加热器,固定输出功率为 $P$ ,待其内部热流达到动态平衡后,测得两端探头与导热球表面接触处的温度分别为 $T_1$ 和 $T_2$ ( $T_1 > T_2$ ).设导热球半径为 $R$ ,由于导热探头与导热球之间并非点接触,而是存在有效接触面积,假设该部分为圆形,半径为 $\delta R$ ( $\delta$ 为接触圆面半径对于球心 $O$ 的张角弧度数, $\delta \ll 1$ ).

假定内部热流线的方向均与两探头连线平行,如图1所示.

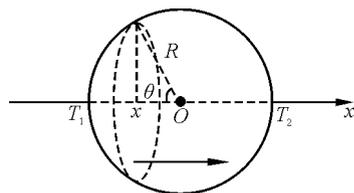


图1 同向热流假设

作者简介:李子涵(2003-),男,在读本科生.

通讯作者:李智华(1976-),女,教授,博士生导师,从事激光与物质相互作用方面的研究.

则根据傅里叶热传导定律,得到

$$P = -\kappa \pi (R \sin \theta)^2 \nabla T \cdot \mathbf{i} \quad (2)$$

$\mathbf{i}$  表示沿热流方向的单位矢量,此时内部温度为一维分布,温度为位置的单元函数,因此温度梯度为

$$\nabla T = \frac{dT}{dx} \mathbf{i} \quad (3)$$

由图 1 可得

$$x = -R \cos \theta$$

$dx$  表示为

$$dx = d(-R \cos \theta) = R \sin \theta d\theta \quad (4)$$

联立式(2)~(4)并积分,注意到  $\theta$  的积分范围为  $[\delta, \pi - \delta]$ ,得

$$-\kappa \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{P}{\pi R} \int_{\delta}^{\pi-\delta} \frac{d\theta}{\sin \theta} \quad (5)$$

进一步整理得到热导率的表达式

$$\kappa = \frac{2P}{\pi R (T_1 - T_2)} \ln \left( \cot \frac{\delta}{2} \right) \quad (6)$$

上述推导是建立在内部热流线方向与两探头连线方向平行的假设之上,而实际情况是内部热流线的方向不可能是沿同一方向,进而内部温度并不是一维分布.为了更精确地求出热导率,必须要求出导热球内部的热流线分布,进而求出温度分布,再代回傅里叶热传导定律进行求解.由于不可逆过程热力学的研究方法较为有限,求解温度场的分布只有利用分离变量法求解无源定态拉普拉斯方程,但由于计算量过于复杂导致可行性与适用性不强.

### 3 与静电场中的稳恒电流进行类比

为了更为简便且精确地求解出温度场的分布,采用类比的方法,将温度场和静电场的有关方程进行对比,寻找问题的突破口.

无源定态热流场的温度分布满足如下拉普拉斯方程

$$\nabla^2 T = 0 \quad (7)$$

热流线分布满足傅里叶热传导定律

$$\mathbf{J}_{\text{heat}} = -\kappa \nabla T \quad (8)$$

根据热流守恒定律,热流密度与探头外加功率之间满足如下方程

$$\oiint \mathbf{J}_{\text{heat}} \cdot d\mathbf{S} = P \quad (9)$$

对应于静电场中,无电荷分布区域的电势同样满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (10)$$

电流密度满足欧姆定律微分形式

$$\mathbf{J}_{\text{current}} = -\sigma \nabla \varphi \quad (11)$$

电流密度满足定义式

$$\oiint \mathbf{J}_{\text{current}} \cdot d\mathbf{S} = I \quad (12)$$

经过对比后可发现,式(7)~(9)和式(10)~(12)两组公式同构,通过类比直接写出 3 组等价关系

$$T \leftrightarrow \varphi \quad \kappa \leftrightarrow \sigma \quad \frac{P}{\kappa} \leftrightarrow \frac{I}{\sigma}$$

综上所述,可以先考虑静电学相关的问题,再将系数进行替换,进而得到对应问题的温度场分布.

### 4 利用电像法讨论对应静电学问题

将对应的导热球问题等效为如下导电球问题:如图 2 所示,一个半径为  $R$  的均匀导电球,电导率为  $\sigma$ ,在其内部某一条直径上放置一对正负电荷,带电荷量分别为  $\pm q$ ,距离球心均为  $a$  ( $a \rightarrow R$ ),试求解导电球内部的电势分布.

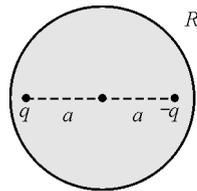


图 2 导电球

这个问题中,导电球边界及其内部的边界条件为:

(1) 导电球表面电场法向分量为零,对应导热球表面的绝热近似;

(2) 电荷只在两个点源处有积累,在导电球内部其他地方不存在净电荷,对应于导热球直径两端温度为  $T_1$ 、 $T_2$  的热探头.

根据静电场的唯一性定理,可知全空间电场唯一确定,对应地,导电球内部的电流线分布也唯一确定.

为了满足上述边界条件,构造如下电像:如图 3 所示,在原两点电荷所在直线上距离球心为  $\frac{R^2}{a}$  处放

置一对正负电荷,带电荷量分别为  $\pm \frac{Rq}{a}$ ; 两段半无限长线电荷一端与像电荷重合,另一端延伸至无穷远处,且线电荷密度分别为  $\pm \frac{q}{R}$ . 上述系统中的所有正电荷在一侧,负电荷在另一侧对称位置处.

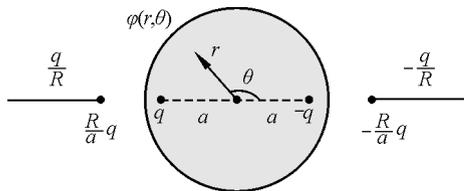


图3 导电球电像

以球心为坐标原点,向右为极轴方向,建立球坐标系. 考虑所有电荷的贡献,导电球内部的电势分为如下3部分求得.

#### 4.1 两原点电荷的电势

直接利用点电荷电势叠加得到

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} \quad (13)$$

#### 4.2 两像点电荷的电势

同样利用点电荷公式

$$\varphi_2 = \frac{Rq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^4 + a^2 r^2 + 2R^2 ar \cos \theta}} - \frac{Rq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^4 + a^2 r^2 - 2R^2 ar \cos \theta}} \quad (14)$$

#### 4.3 两线电荷的电势

将其分成无穷多点电荷微元,利用叠加原理

$$\varphi_3 = \int_{\frac{R^2}{a}}^{+\infty} \frac{q dx}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{x^2 + r^2 + 2xr \cos \theta}} - \int_{\frac{R^2}{a}}^{+\infty} \frac{q dx}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta}} \quad (15)$$

这是一个初等积分,经过配方后,利用如下积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + C \quad (16)$$

积分后得到

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot$$

$$\ln \frac{\sqrt{a^2 r^2 + R^4 - 2R^2 ar \cos \theta} + R^2 - ar \cos \theta}{\sqrt{a^2 r^2 + R^4 + 2R^2 ar \cos \theta} + R^2 + ar \cos \theta} \quad (17)$$

最终导电球内部及其表面的电势分布为上述3部分

叠加

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (18)$$

可以验证,对导电球表面电势求法向导数,得到

$$E_n(R) = 0 \quad (19)$$

满足边界条件,证明得到的解正确且唯一.

为了利用三组等价关系,需要找到电流  $I$  与电荷量  $q$  之间的关系. 在导电球内部作包含原电荷的高斯面,利用静电场的高斯定理,得到

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (20)$$

利用欧姆定律的微分形式

$$\mathbf{J}_{\text{current}} = \sigma \mathbf{E} \quad (21)$$

结合电流密度的定义

$$\oiint \mathbf{J}_{\text{current}} \cdot d\mathbf{S} = I \quad (22)$$

联立式(20) ~ (22), 得到

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{I}{\sigma} \quad (23)$$

将式(23)代回式(18)中,得到用电流表示的电势表达式.

## 5 通过等价关系得到对应温度场分布

由于导热球问题中探头位置几乎位于导热球表面,因此令静电学问题中的  $a \rightarrow R$ , 整理后得到电势的最终表达式

$$\varphi(r, \theta) =$$

$$\frac{I}{4\pi\sigma R} \ln \frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta} + R - r \cos \theta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr \cos \theta} + R + r \cos \theta} + \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta}} - \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \quad (24)$$

利用3组同构关系,直接得到导热球内部温度分布

$$T(r, \theta) =$$

$$\frac{P}{4\pi\kappa R} \ln \frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta} + R - r \cos \theta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr \cos \theta} + R + r \cos \theta} + \frac{P}{2\pi\kappa} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta}} - \frac{P}{2\pi\kappa} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \quad (25)$$

这一表达式并不能直观地表现温度在导热球内部的分布情况,笔者利用 COMSOL 模拟了温度场和热流场的分布,结果如图 4 所示.

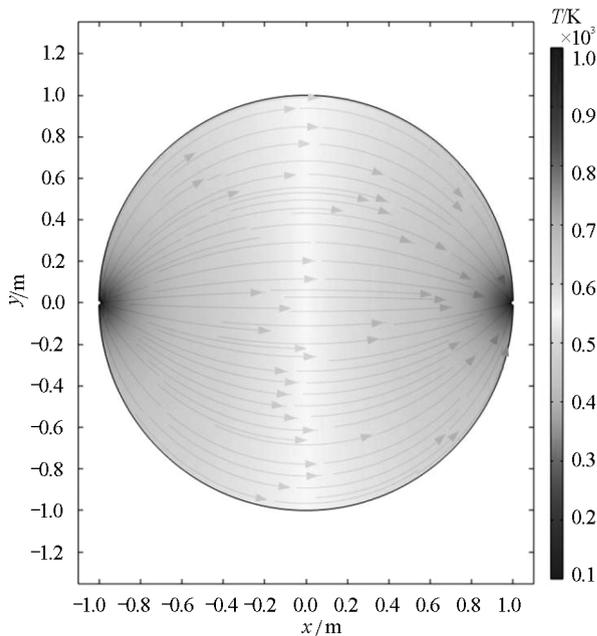


图 4 导热球内部温度和热流线分布

结果表明温度梯度较大的区域集中在两探头附近,靠近边界处的热流线与导热球边界重合,这与边界条件相符.

为了求解热导率的计算式,令  $r=R$ ,得到导热球表面的温度分布

$$T(R, \theta) = \frac{P}{4\pi\kappa R} \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} + \ln \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}} \right) \quad (26)$$

考虑  $\theta=\delta, \theta=\pi-\delta$  处的温度,作为两探头处的温度.二者作差,并保留到  $\delta$  的一阶近似项得到

$$T_1 - T_2 = \frac{P}{2\pi\kappa R} \left( \frac{2}{\delta} + \ln \frac{4}{\delta} - 1 \right) \quad (27)$$

解得热导率的最终计算式

$$\kappa = \frac{P}{2\pi R(T_1 - T_2)} \left( \frac{2}{\delta} + \ln \frac{4}{\delta} - 1 \right) \quad (28)$$

## 6 利用 COMSOL 进行热导率的仿真模拟

为了验证式(28)计算结果的正确性,笔者利用 COMSOL 仿真模拟不同参数下的热导率,并与式(28)的理论计算结果相比较.

取  $R=1 \text{ m}, T_1=298 \text{ K}, P=1 \text{ W}$ ,选取不同的  $\delta$  进行模拟,得到结果如表 1 所示.

表 1 仿真模拟与理论计算结果

变量 $\delta$	仿真模拟 热导率 $\kappa / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	理论计算 热导率 $\kappa / (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	相对 误差 / %
0.010	1.308	1.305	0.23
0.030	0.452	0.449	0.67
0.050	0.279	0.276	0.91
0.075	0.191	0.189	1.0
0.090	0.162	0.159	1.9
0.100	0.147	0.144	2.1

从表 1 可看出,热探头圆截面的半径越小,理论计算的结果与 COMSOL 仿真模拟结果符合较好.当所取探头的  $\delta < 0.05$  时相对误差可以控制在 1% 以内.

## 7 类比法求解热传导问题在生命科学研究方面的潜在应用

利用静电学的方法可以求解复杂热传导问题的温度场分布和热流线分布,只需要进行相应的系数替换即可.同样地,从静电场出发,考虑不同情况下的电势分布,可以得到对应的温度场分布,这种类比的想法对生命科学研究也有贡献<sup>[3]</sup>.

由 2014 年世界卫生组织发布的报告表明慢性非传染性疾病一直是全球死亡率居高不下的疾病,2014 年全球死亡达 3 800 万人,而中国死亡人数大约占 23%.慢性非传染性疾病的特点是潜伏期较长、病程长、需要长期治疗、很难彻底治愈、表现为不可逆性等.医用红外热成像技术的出现为疾病的及时诊断提供了全新的思路,因为区别于结构影像设备,红外热成像技术在组织结构尚未发生改变而仅发生功能性改变时,根据体表温度的微小变化及早发现异常区域,在病症进一步发展之前,对其进行调理和治疗,或者对异常区域跟踪观察,以争取到宝贵的确诊时间,使患者获得生存机会,也可以对疾病的转移和转移趋势进行辅助诊断,所以医用红外热成像技术具有重大的临床价值.

医用红外热像仪能够实现疾病的及时诊断甚至于预测,是因为它是一种反映温度变化的人体热图记录仪,是通过非接触式地检测人体皮肤发出的红外热辐射信号,将其先转换成电信号,再经过一系列处理得到反映温度情况的热分布图,结合医学技术理论进一步分析研究的技术.生物组织本身为导热介质,内部病变部位会成为点热源,因此要通过组织表面温度分布判断病变部位,离不开求解生物热传导方程,较为常用的 Pennes 方程为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (29)$$

由于其本质为热传导方程,通过程序法求解会较为繁琐.而采用静电学的方法进行类比,通过求解类似的静电学问题会避免求解大量的偏微分方程,对于提高计算效率有一定的价值.

## 8 总结

对于两点源的热传导问题,可以通过求解温度相关的拉普拉斯方程得到.但考虑到点源为  $\delta$  函数,再加上求解偏微分方程的分离变量法,求解过程难

(上接第 16 页)

类题目中学生可以围绕生活的方方面面自己提出问题并在实验过程中分析和解决问题.

### 3.4 善用新教学媒介

(1) 结合新教学媒介如超星和雨课堂等,录制演示实验视频资料,上传至教学平台,供学生反复观看和学习.

(2) 在线上教学平台中设置学习任务点,学生可自由选择题目,通过调研设计并动手实验,上传实验过程和结果至教学平台,并开展教师评价和生生互评.

(3) 通过现代教学技术,将现场演示实验实时投屏到教学课堂的投影屏幕上,解决公共课学生多、教室大、学生看不清实验过程的难题.

## 4 结束语

以提高大学物理课程的教学效果为出发点,以培养出高质量、高素质的大学生为教学目标,以大学

度较大.本文采用类比的方法,通过比较温度场基本方程与静电场基本方程的同构性,将热传导问题转化为静电场问题,并利用电像法成功求解出温度场的分布.通过 COMSOL 仿真模拟后,在探头面积足够小时,理论计算值与仿真值的相对误差不到 1%.

同时,本文还介绍了电像法求解热传导问题在生命科学研究中可能的潜在应用.利用类比思想辅助求解生物热传导方程来判断组织内部异常发热点,避免了求解大量偏微分方程的过程,提高了计算的效率,使得医用红外热像技术能够快速判断患者的病变部位进而采取针对的治疗,其具有一定的生物学价值.

## 参考文献

- [1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2008(6): 53 - 56.
- [2] 邢祥军. 用类比法讲解热传导过程及热传导系数[J]. 大学物理教学, 2014(7): 39 - 40.
- [3] 周敏华. 基于生物传热效应的医用红外热成像技术[D]. 南京: 南京理工大学, 2010.

物理教学中存在的痛点问题为导向进行教学改革, 创新性地将生活化物理实验引入大学物理课堂教学中. 融合现代教学手段进行了教学模式、教学内容、教学组织活动、教学方法、教学评价和教学新媒介等 6 方面的改革, 丰富了大学物理教学体系, 体现了课程内容的实用性, 培养了学生的自然科学素养和科研能力, 值得在大学物理课程教学中推广实践.

## 参考文献

- [1] 蒋镜源. 大学物理实验生活化教学创新模式探析[J]. 湖北函授大学学报, 2013, 26(7): 64 - 65.
- [2] 张珉铨. 基于生活体验的物理学习探索[J]. 试题与研究, 2021(27): 109 - 110.
- [3] 孙辉, 韩玉龙, 孙金芳. 基于实例的应用型大学物理教学模式改革[J]. 物理通报, 2017(10): 16 - 20.
- [4] 李磊, 许雪松, 尹淑慧, 等. 以学生为中心的大学物理教学模式的研究与实践[J]. 物理通报, 2018(10): 24 - 26.
- [5] 石薇, 许广智, 李一杰, 等. 闭环式教学模式在《固体物理》中的实践和探索[J]. 物理通报, 2022(6): 29 - 32.