对一道课后改编习题的深入思考

——不等量异种电荷连线上场强最弱位置的求法

张文杰　武　维　全水聪

（包头市第九中学　内蒙古 包头　014010）

（收稿日期：2023－06－02）

摘　要：通过对新教材电场强度一节中一道课后改编习题的深入分析研究，给出了利用拉格朗日乘数法求解不等量异种电荷连线上场强最弱位置的方法，并且用数学函数图像的极值点加以佐证，也展示了学生在处理该问题的常见错误.

关键词：不等量异种电荷；电场强度；拉格朗日乘数法

1　问题的提出

下面的习题是一道人教版新教材必修第三册“9.3 电场 电场强度”课后习题第 7 题的改编题目：

【题目】如图 1 所示，真空中有两个异种点电荷，$Q_1=4Q_2$，分别固定在 x 轴的坐标为 0 和 6 cm 的位置上. 一带正电粒子从 1 cm 处静止释放，在仅受电场力作用下沿 x 轴运动，现研究该粒子从 1 cm 到 5 cm 运动过程，下列说法中正确的是（　　）

图 1　题图

A. 该粒子速度先增大后减小

B. 该粒子加速度先增大后减小

C. 该粒子电势能先减少后增大

D. 该粒子在 1 ～ 2 cm 的动能变化量大于 3 ～ 4 cm 的动能变化量

该题目的正确答案为选项 D，要想正确分析求解 1 ～ 2 cm 的动能变化量和 3 ～ 4 cm 的动能变化量之间的关系，必须分析得出在 Q_1、Q_2 连线上 0 ～ 6 cm 之间电场强度最弱的点所在位置，对于该问题的分析，学生在做题时出现了以下两种典型的错误.

2　两种错误解法及错因分析

错解一：

设在 Q_1、Q_2 连线上 0 ～ 6 cm 之间电场强度最弱的点坐标为 x cm，根据点电荷电场强度的计算公式和电场强度的叠加原理

$$E=\frac{4kQ}{x^2}+\frac{kQ}{(6-x)^2}$$

对上式通分得

$$E=\frac{5x^2-48x+144}{x^2(6-x)^2}kQ$$

令
$$f(x)=5x^2-48x+144$$

对上式求导可得

$$f'(x)=10x-48$$

当 $f'(x)=0$ 时，解得 $x=4.8$ cm.

错因分析：在求场强最小值的过程中，由于电场强度表达式的分母中 $x^2(6-x)^2$ 并不是一个单调函数，因此，对 $f(x)=5x^2-48x+144$ 求导数得到的最小值仅仅是分子的最小值，而不是电场强度 E 的最小值.

错解二：

设在 Q_1、Q_2 连线上 0 ～ 6 cm 之间电场强度最弱的点离 Q_1 的距离为 r_1，离 Q_2 的距离为 r_2.

$$E=\frac{4kQ}{r_1^2}+\frac{kQ}{r_2^2}=kQ\left(\frac{4}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)$$

由基本不等式可得

$$E=kQ\left(\frac{4}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)\geqslant kQ\times 2\sqrt{\frac{4}{r_1^2r_2^2}}$$

当且仅当$\frac{4}{r_1^2}=\frac{1}{r_2^2}$即 $r_1=2r_2$ 时等号成立，又因为 $r_1+r_2=6$，解得

$$r_1=4\text{ cm}\qquad r_2=2\text{ cm}$$

因此，在 Q_1、Q_2 连线上 0 ～ 6 cm 之间电场强度最弱

的点坐标为 4 cm.

错因分析:在利用基本不等式"若 $x>0$,$y>0$,则 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,当且仅当 $x=y$ 时,等号成立"时需要满足当两个正数的积为定值时,它们的和有最小值;当两个正数的和为定值时,它们的积有最大值.在应用基本不等式求最值时,应做到"一正、二定、三相等"[1].

但在式(1)的应用中

$$\frac{4}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{4}{r_1^2}+\frac{1}{(6-r_1)^2}\geqslant 2\,\frac{2}{r_1}\,\frac{1}{6-r_1}$$

其中$\frac{2}{r_1}\,\frac{1}{6-r_1}$ 并不是定值,因此不能使用基本不等式.

3　正确解法

设在 Q_1、Q_2 连线上 0 ~ 6 cm 之间电场强度最弱的点离 Q_1 的距离为 r.设 $a=r$,$b=6-r$,则

$$a+b=6$$

令

$$F(a,b,\lambda)=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\lambda(a+b-6)$$

求导可得

$$F'(a)=-8a^{-3}+\lambda$$

$$F'(b)=-2b^{-3}+\lambda$$

$$F'(\lambda)=a+b-6$$

分别令

$$F'(a)=0\qquad F'(b)=0\qquad F'(\lambda)=0$$

可解得

$$a=\frac{2}{\sqrt[3]{\lambda}}\qquad b=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\lambda}}\qquad \lambda=\left(\frac{2+\sqrt[3]{2}}{6}\right)^3$$

所以当

$$a=r=\frac{2}{\sqrt[3]{\lambda}}=\frac{12}{2+\sqrt[3]{2}}\approx\frac{12}{2+1.26}=3.681\ \text{cm}$$

时,场强有最小值.

笔者又利用计算机做出了 $y=\frac{4}{r^2}+\frac{1}{(6-r)^2}$ 的函数图像,如图 2 所示,可见函数图像中 0 ~ 6 之间最低点的坐标为(3.681,0.481),与利用拉格朗日乘数法求得的极值坐标相同.

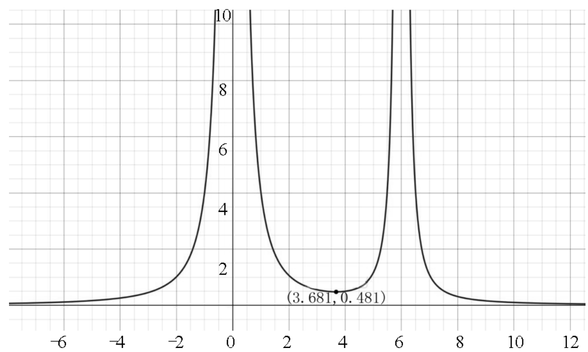

图 2　函数图像

4　总结

通过上述对不等量异种电荷连线上场强最弱位置的错解分析及其正确解法可见,学生在学习物理时必须合理使用数学知识,并且不能死记硬背,要灵活掌握数学公式、定理的适用条件,同时希望本文给出的用拉格朗日乘数法求极值的方法可以对学生解决类似问题有所帮助.

参 考 文 献

[1] 李文东.正确理解和运用基本不等式求最值[J].高中数理化,2021(19):22-24.

(上接第 159 页)

挛,一下子勾住电源,就难以脱身从而酿成悲剧.在校园用电中,校方必须配有数名专业的电工,培训上岗,务必保证全天有人值岗巡查,有用电突发事故能第一时间到达现场并妥善处理,保证校园师生和财产安全.定期对校园师生开展安全用电常识教育(定期讲座或开发成校本课),增强安全用电意识.校园师生若发现用电事故或隐患务必第一时间上报电工并隔离现场,警示他人.

写在最后:安全无小事,用电需谨慎.

参 考 文 献

[1] 郭木森.电工学[M].北京:高等教育出版社,2001.

[2] 乔永海.三相交流电相线电压关系的证明[J].物理通报,2021(S2):160-161.

[3] 田永哲.漏电保护器的原理和使用[J].广播电视信息,2012(6):78-81.

[4] 王琳基,卢腾镞.三相四线制的零线电流大于最大相电流的原因分析[J].电工技术,2001(4):50.

[5] 柳春芳,何智祥,陈增胜,等.带零线电流判据的零线断线检测新方法[J].华北电力大学学报(自然科学版),2015,42(4):41-45.