

含容电路导体棒运动问题的再讨论*

王小军 左 潘

(西北大学附属中学 陕西 西安 710075)

(收稿日期:2023-06-03)

摘要:在电磁感应中,关于单棒-电容器在有外力作用下运动问题,教师普遍认为在恒力作用下单棒以恒定加速度运动,通过定性分析和定量探究发现有外力作用下,单棒-电容器并非以恒定加速度运动.文章通过定量求解和 MATLAB 数值模拟分析了产生这一矛盾的原因,为教师深入理解单棒-电容器问题提供一些启示.

关键词:电磁感应;单棒;电容器

1 引言

单棒-电容器连接问题是深入理解电磁感应问题的基础,也是培养学生利用动力学、能量、动量观点解决物理问题的综合考查;无论是参考资料还是教师在讲解时都认为单棒-电容器在恒力作用下以恒定的加速度运动,但是并不符合在初始时刻加速度特点.可见通过传统意义上分析此模型出现了不可调和的矛盾.为了解释这一问题产生的原因,笔者通过定量求解其运动过程的各物理量的解析式,从而分析这一矛盾产生的原因.并通过 MATLAB 数值模拟了各个参量变化对图线的影响.加深了对电磁感应中单棒-电容器的理解.

2 原题呈现

【原题】如图 1 所示, ab 、 cd 为光滑平行直导轨, b 、 d 间连接电容为 C 的电容器,一根质量为 m 、长度为 l 的金属棒 MN 放在 ab 、 cd 两导轨上,现给金属棒一水平方向向右的恒力 F ,试分析棒的运动情况?

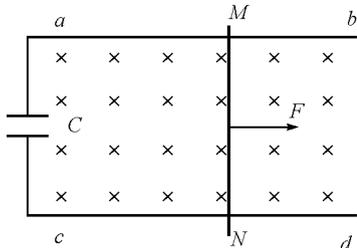


图 1 原题题图

分析:运动过程中金属棒不仅受到向右的外力 F ,由于电磁感应还会受到向左的安培力,根据牛顿第二定律可知

$$F - Bil = ma \quad (1)$$

设 Δt 内流过金属棒的电荷量为 Δq ,而流过金属棒的电荷量全部用来给电容器充电;故流过金属棒的电荷量 Δq 等于电容器电荷量的增加量,即

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{C\Delta U}{\Delta t} = \frac{CBl\Delta v}{\Delta t} = CBl a \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)可得

$$a = \frac{F}{B^2 l^2 C + m} \quad (3)$$

所以金属棒在做加速度恒定的匀加速直线运动.

3 问题提出

3.1 定量计算

金属棒在初始时刻只受到外力 F 的作用,其加速度 $a_0 = \frac{F}{m}$,这显然和以上推理违背,为了解释这一矛盾产生的原因本文进行以下的定量计算.

根据牛顿第二定律可知

$$F - Bil = ma \quad (4)$$

假设某一时刻金属棒的速度为 v ,电容器两端的电压为 U_c ,根据基尔霍夫定律可知

$$Blv - U_c = iR \quad (5)$$

式(5)对时间 t 求导,并将式(4)代入可得

* 陕西省教育科学“十四五”规划 2023 年度课题“基于学科素养下高中物理 2019 人教版教材的应用策略与实践研究——以问题栏目为例”,课题编号:SGH23Y2287.

作者简介:王小军(1980-),男,硕士,中教高级,主要研究方向为中学物理教学.

$$\frac{di}{dt} + \frac{B^2 l^2 C + m}{RCm} i = \frac{FBl}{mR} \quad (6)$$

以上为一阶常系数微分方程,根据常系数微分方程的通解公式,并带入初始条件 $t=0$ 时 $i=0$,得电流随时间变化情况为

$$i = \frac{FBlC}{B^2 l^2 C + m} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2 C + m}{RCm} t} \right) \quad (7)$$

根据量纲变换可知 $B^2 l^2 C$ 的量纲为[M], $\frac{B^2 l^2 C + m}{RCm}$ 的量纲为 $\left[\frac{1}{T} \right]$,令 $\frac{B^2 l^2 C + m}{RCm} = k$,则式(7)变为

$$i = \frac{FBlC}{B^2 l^2 C + m} (1 - e^{-kt}) \quad (8)$$

将式(8)带入式(4)可得加速度的解析式为

$$a = \frac{F}{m} - \frac{FB^2 l^2 C}{m(B^2 l^2 C + m)} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2 C + m}{RCm} t} \right) = \frac{F}{B^2 l^2 C + m} + \frac{FB^2 l^2 C}{m(B^2 l^2 C + m)} e^{-kt} \quad (9)$$

根据 $i = \frac{dq}{dt}$ 可知

$$q = \frac{FBlC}{B^2 l^2 C + m} t + \frac{FBlRC^2 m}{(B^2 l^2 C + m)^2} e^{-kt} \quad (10)$$

根据 $a = \frac{dv}{dt}$ 可知

$$v = \frac{F}{B^2 l^2 C + m} t - \frac{FRB^2 l^2 C^2}{(B^2 l^2 C + m)^2} e^{-kt} \quad (11)$$

根据式(9)加速度的解析式可知,当 $t=0$ 时,加速度的大小 $a_0 = \frac{F}{m}$;符合前面定性解释.式(9)中影响加速度大小的因素为第一项的常数项和第二项的指数项.由于指数项为减函数,如果充电时间极短,也就意味着指数项迅速衰减至零.这一结论和前面式(3)分析结果保持一致.但是在实际处理问题时,应该关注式(9)中指数项衰减至零所需时间是否极短可忽略.由指数函数的幂可知,其影响衰减速率的因素由 B, l, C, R, m 这5个参量共同决定,所以更应该关注这5个参量对 i, q, v, a 的影响情况.

3.2 数值模拟

数值模拟各个参量随 k 值大小变化情况.

如图2所示,绘制电流随时间变化情况,令纵轴

$\frac{FBlC}{B^2 l^2 C + m} = A$,可知当 k 值恒定时,导体棒在外力作用下其充电电流随时间在逐渐增加,最后快速趋于恒定值;

随着 k 值的增加,电流趋于稳定的速率越

快.此时导体棒所受安培力迅速趋于稳定,合力趋于恒定,加速度快速趋于稳定.

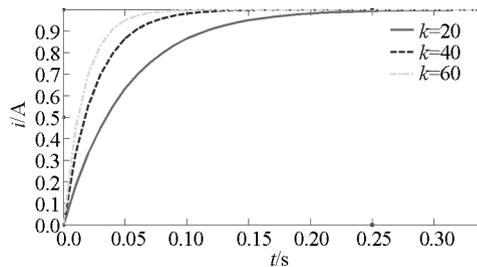


图2 $i-t$ 图像

令纵轴 $RCm = X$,通过对 k, X 赋值来判断电容器两端充电电荷量与时间的变化情况如图3和图4所示.

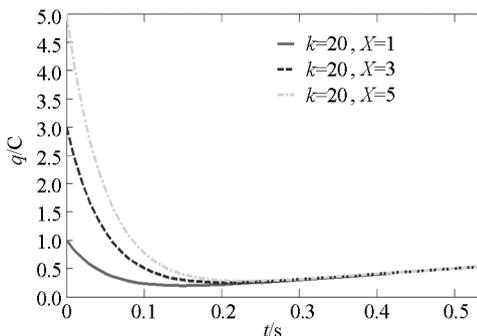


图3 k 不变, X 变化

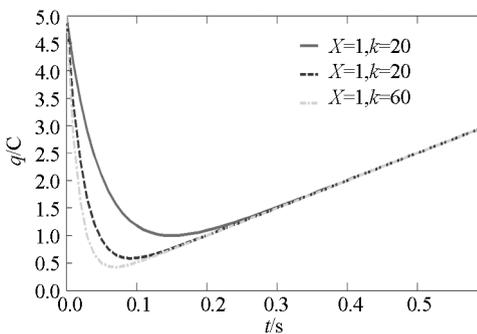
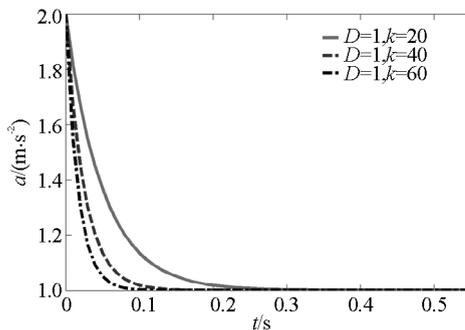
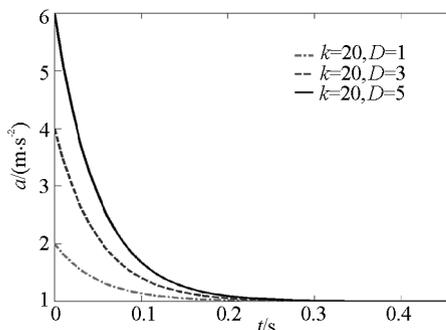


图4 X 不变, k 变化

根据图3可知当 k 值恒定时,导体棒在外力作用下其充电电荷量随时间先减小后增大,最后随时间均匀增加; X 取值越大充电速率越缓慢;根据图4可知当 X 值恒定时,导体棒在外力作用下其充电电荷量随时间先减小后增大,最后随时间均匀增加;随着 k 值的增加,充电电荷量随时间变化速率越快.最后导体棒匀加速运动,充电电荷量随时间均匀增加.

令 $D = \frac{B^2 l^2 C}{m}$,绘制导体棒在外力作用下其加速度随时间的变化趋势如图5和图6所示.

图5 D 不变, k 变化图6 k 不变, D 变化

根据图5可知当 D 值恒定时,导体棒在外力作用下其加速度随时间逐渐减小最后趋于稳定; k 取值越大加速度趋于稳定所需时间越短;根据图6可知当 k 值恒定时,导体棒在外力作用下其加速度随

时间逐渐减小,最后趋于稳定值;随着 D 值的增加,加速度趋于稳定值所需时间越长.

4 启示

通过MATLAB描述了电容器两端充电电荷量、电流、以及导体棒加速度随时间的变化图像,可见单棒在外力作用下其加速度在极短时间内趋于恒定值 $a = \frac{F}{B^2 l^2 C + m}$,这不违背前面式(3)的导出结果;但是在定性解释过程中应关注这极短时间内加速度随时间的变化情况,初始时刻其加速度应该为 $a_0 = \frac{F}{m}$,也解决了上面提到的矛盾点,所以在题目题干设置上,建议应该加上“充电时间较短”的字眼,这样才不违背上述常规解法的结果.通过上面的定性和定量分析以及MATLAB数值模拟使教师对单棒在恒力作用下的运动有了更深层次的认识,为电磁感应其他实例模型提供了参考.

参考文献

- [1] 李元法. 运用动量定理妙解电磁感应中的单杆问题[J]. 物理之友, 2017, 33(5): 35-37.
- [2] 姜荣. 例谈电磁感应中的单杆问题[J]. 湖南中学物理, 2012, 33(6): 51-52.

3 结束语

综上所述,对于复杂的运动学问题,分析清楚物体运动情况和已知题干信息,需要多角度考虑问题.结合2023年高考全国乙卷理综第25题给出的3种解题方法,开拓学生思维,达到一题多解,在时间充足的情况下,还可以验证结果的真实性.

(上接第145页)

第四次碰撞后至第五次碰撞前圆盘下滑距离

$$x_{\text{盘}4} = 2v_0 t_1 = 8l$$

则圆盘运动的总位移

$$x = 2l + 4l + 6l + 8l = 20l > 19l$$

所以小球和圆盘在管内只发生4次碰撞.

Appreciation on the 25th Question of National Volume B Science Comprehensive Test in College Entrance Examination of 2023

ZENG Chaoyuan

(Sichuan Shimian County Middle School, Ya'an, Sichuan 625400)

Abstract: The 2023 college entrance examination ended. The college entrance examination questions are the weather vane of the high school physics teachers. Aiming at the hot spots of the college entrance examination physics proposition, this paper uses three methods to appreciate the 2023 college entrance examination national volume B comprehensive science question 25 from multiple perspectives, and finally summarizes and analyzes the ideas to cultivate students' core literacy ability.

Key words: physics for the college entrance examination; elastic collision; multiple solutions to one problem