# 微积分在质点运动学两类问题中的应用

丁嘉宁
（华北理工大学电气工程学院 河北 唐山 063000）

（收稿日期：2022－05－20）

**摘 要**：用微积分求解运动学两类问题是大学物理的一个重要学习内容. 通过分析微积分的意义找到了微积分与乘、除法的对应关系；分析了速度或加速度是位置的函数，以及加速度是速度的函数等情况的求解方法，并给出了对应的典型习题，为后续物理知识的学习打下良好的基础.

**关键词**：微积分；质点运动学；速度；加速度

大学物理是工科学生的一门基础课程，力学是这门课程的开篇部分，而质点运动学又是力学的第一个模块，因此，学好质点运动学对于大学物理课程的学习是至关重要的. 教学参考书在这一部分写的都比较简洁，虽然教师对这部分进行了深入透彻的讲解，但对于大学一年级学生而言，在微积分的应用上还是感觉比较困难，因此，对这一部分的总结归纳是十分必要的.

## 1 中学物理与大学物理在数学应用上的比较

运动学两类问题是中学物理与大学物理的衔接部分，在这部分，中学使用的数学工具是加、减、乘、除，而大学用的是微积分，那么它们的联系是什么？经过教师的讲解，并认真思考后发现，除法和导数是对应的，它们都是平均的含义，除法是有限间隔的平均，导数是无限小间隔的平均；乘法和积分是对应的，它们都是求面积，乘法对应的是长方形的面积，而积分对应的是曲边梯形的面积.

以已知速度 $v$ 求加速度 $a$ 为例，说明除法和导数具有相同的含义，中学阶段求加速度采用除法，即 $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$，$t$ 是时间变量；而大学阶段则采用微分的方法，即 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，根据微分的概念，$\mathrm{d}v$ 是无限小的 $\Delta v$，$\mathrm{d}t$ 是无限小的 $\Delta t$. 由此可见，除法和导数都具有平均的含义.

以已知速度 $v$ 求位移 $x$ 为例，说明乘法和积分具有相同的含义，中学阶段求位移采用乘法，即 $x=vt_0$；大学阶段采用积分，即 $x=\int_0^{t_0} v\mathrm{d}t$. 可以用图形将两者统一起来，它们都是由 $t$ 轴，$t=0$，$t=t_0$ 以及函数 $v$ 围成的面积. 可以看出，除法是导数的特例，乘法是积分的特例，也就是说，用除法的问题也可以用导数，用乘法的问题也可以用积分. 这些运算的本质都是加法，在物理学中称为叠加原理.

## 2 运动学两类问题几种常见题型

运动学两类问题是根据速度和加速度定义式进行求导或积分的问题，一般是一维问题，即将矢量运算转化成标量运算. 如果已知变量是时间的函数，如 $a=a(t)$、$v=v(t)$ 或 $x=x(t)$，问题比较简单，直接求导或积分就可以. 但如果自变量不是时间，而是速度或位置，就容易出问题. 当教师讲完速度和加速度定义式，让学生做这样一道题，已知速度 $v=x^2$，其中 $x$ 为位置，求加速度 $a$. 刚看到这个题时，学生会觉得非常简单，马上写出

$$a=\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=2x$$

当教师告诉学生正确结果是 $a=2x^3$，并强调加速度是位置对时间求导时，才意识到时间和空间的区别. 同时教师帮助学生分析了得到这个错误结果的原因，在学习高等数学时，关注具体计算比较多，对自变量是哪个变量关注不够，因为在数学上自变量没有具体的含义，至于用什么来表示没有区别. 下面对以位置或速度作为自变量的几种形式进行了总结.

（1）速度是位置的函数

速度 $v$ 是位置 $x$ 的函数，即 $v=v(x)$，当时间 $t=0$ 时，$x=x_0$，求加速度 $a$ 和运动学方程. 根据加速度定义式 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，注意到速度 $v$ 表达式的自变量是位置

$x$ 而不是时间 $t$，再考虑到复合函数求导，则有

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

同时注意到速度是位置对时间的一阶导数，则有

$$a=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

当求运动学方程时，即求位置 $x$ 随时间 $t$ 的变化关系，根据速度 $v$ 的定义式

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

写成积分形式

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v(x)\mathrm{d}t$$

同时需要注意到，被积函数的自变量与积分变量的统一，则有

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{v(x)}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

(2) 加速度是位置的函数

加速度 $a$ 是位置 $x$ 的函数，即 $a=a(x)$，当时间 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=x_0$，求速度 $v$ 和运动学方程. 根据加速度定义式，并写成积分形式有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a(x)\mathrm{d}t \tag{1}$$

我们注意到，两个积分变量分别为 $v$ 和 $t$，但被积函数的自变量为 $x$，通过移项是不能完成积分运算的，这就需要根据物理量的定义或物理定律将变量 $v$ 或 $t$ 中的一个转化成 $x$，同时不能引入新的变量，如果能够找到一个由速度 $v$、时间 $t$ 和位置 $x$ 这 3 个变量定义的物理量或物理定律，问题就解决了. 可以发现速度 $v$ 是位置 $x$ 对时间 $t$ 的一阶导数，将速度定义式写成微分形式，即 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，通过移项得到

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{v}$$

将上式代入式(1) 中，并进行移项就得到了下式，即

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

这样就可以进行积分运算了. 再求运动学方程时，就变成了速度 $v$ 是位置 $x$ 的函数问题了.

**【典型习题】** 均匀的柔软链条，质量为 $m$，长为 $l$，一部分 $(l-a)$ 放在光滑的水平桌面上，一部分(长为 $a$) 从桌面边缘下垂，求链条末端离开桌面时的速度大小.

由于质量不变，力是链条下垂长度(位置) 的函数，也就是加速度是位置的函数. 如果桌面有摩擦，摩擦力和下垂部分重力均是位置的函数[1].

(3) 加速度是速度的函数

加速度 $a$ 是速度 $v$ 的函数，即

$$a=a(v)$$

当时间 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=x_0$，求速度 $v$ 和运动学方程. 求解速度时，也需要根据加速度定义式，并写成式(1) 的形式，这时我们发现被积函数的自变量是积分变量 $v$，通过移项就可以进行计算，即

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{a(v)}=\int_0^t\mathrm{d}t \tag{3}$$

计算运动学方程时，速度 $v$ 是时间 $t$ 的函数，直接积分就可以得到结果.

在习题中，一般是物体所受空气阻力与其速率成正比或与其速率平方成正比[2-4]. 在大学普通物理中，讨论这类问题时，质量是不变的，阻力与其速率成正比或与其速率平方成正比，也就是加速度与其速率成正比或与其速率平方成正比.

## 3 结束语

在大学物理的学习中，质点运动学处于中学物理与大学物理衔接的关键位置，处理好中学物理与大学物理的衔接对大学物理的学习是十分重要的. 在质点运动学中，大学物理与中学物理的重要区别就是对瞬时概念的理解，即对微积分概念的理解. 本文讨论了微积分的意义，以及微积分与乘、除法的关系；给出了速度或加速度是位置的函数，加速度是速度的函数等情况的具体求解方法.

## 参 考 文 献

[1] 罗益民，余燕. 大学物理[M]. 北京：北京邮电大学出版社，2008：75.

[2] 漆安慎，杜婵英. 普通物理学教程 · 力学[M]. 北京：高等教育出版社，1996：78－79.

[3] 张汉壮，王文全. 力学[M]. 北京：高等教育出版社，2009：46－47.

[4] 赵近芳. 大学物理简明教程[M]. 北京：北京邮电大学出版社，2008：25－26.