两张邮票引发的思考*

——万有引力与球心距的平方成反比的几何证明

吴庆林
（三明第一中学　福建 三明　365001）
李旭伟
（三明市第三中学　福建 三明　365001）
罗　翀
（三明第一中学　福建 三明　365001）

（收稿日期：2023－06－19）

摘　要：牛顿以其高超的数学才能证明了质量均匀的球体和球外质点间的万有引力，可等效成球的质量集中在球心，从而转化为球心和质点之间的万有引力，这一结论出版于《自然哲学的数学原理》. 书中虽有完备的证明，但书中欧几里德式的连环引理，且当下的主要译本中因翻译出现的表述模糊使其生涩难懂，对书中一些模糊的几何问题进行解释说明并在原书的基础上对这一结论进行详细的证明.

关键词：万有引力；牛顿；几何证明；球心距

1　引言

邮票的价值不仅是邮资凭证，小小方寸中包含了天文地理、哲学历史和科学技术等领域，有微型百科全书之称. 1987 年英国发行了一组 4 张邮票以纪念牛顿的《自然哲学的数学原理》出版 300 周年，其中有一张包含书名、苹果和一幅几何图［图 1(a)］，突出了牛顿对万有引力理论的贡献[1]. 1993 年朝鲜为纪念牛顿诞生 350 周年发行的一组邮票中也有该几何图［图 1(b)］. 这些邮票内容丰富，然而这两张邮票中的几何图略有不同，查阅《原理》原书（第一篇命题 71），是牛顿用几何方法证明均匀球体对球外一点的引力等效于球的全部质量集中于球心时对该质点的作用.

(a)　(b)

图 1　两张邮票

其中图 1(a) 所示的几何图为正确的，即 $\overrightarrow{tQ} \perp \overrightarrow{PB}$. 书中的连环引理，且因翻译出现的表述模糊使其生涩难懂，本文在原书的基础上对这一结论进行详细的证明.

2　对球体引力半径的论证

胡克、雷恩和哈雷等人曾分别独立发现“引力的平方反比关系”，却缺乏定量的表述和论证而无法建立清晰的天体运动概念. 牛顿以其高超的数学才能解决了胡克等人没有能够解决的数学论证问题. 以下就质量均匀的球体和球外质点间的万有引力，可等效成球的质量集中在球心，从而转化为球心和质点之间的万有引力进行论证.

两个质量分布均匀、厚度可忽略，以 S 和 s 为球心的相同球面 $AHKB$ 和 $ahkb$，直径为 AB 和 ab. P 和 p 是位于球外且在直径延长线上的两个可视为质点的相同小球，过 P 和 p 分别作直线 PHK、PIL 和 phk、pil，分别在球面截得相等的弧长 $\overset{\frown}{HK} = \overset{\frown}{hk}$、$\overset{\frown}{IL} = \overset{\frown}{il}$，过 S、s 点作 PK、PL 和 pk、pl 的垂线 SD、SE、sd 和 se，过 I 和 i 分别作 PK、PB 和 pk、pb 的垂线 RI、IQ 和 ri、iq，SD 与 PL 交于点 F，sd 与 pl 交于点 f，如图 2 所示.

* 福建省教育科学“十四五”规划 2023 年度常规课题“面向 STEAM 教育的中学物理 5E 教学及案例研究”的阶段性研究成果，课题立项批准号：FJJKZX23－463.

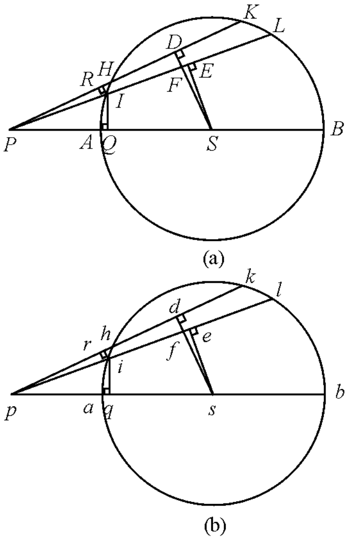

图 2　两个相同球面及作图

当 $\angle DPE$ 和 $\angle dpe$ 逐渐减小并趋近零(以下证明过程均在此前提下),点 F 与点 E、点 f 与点 e 将重合,故 $PE = PF$,$pe = pf$. 由于 $\overset{\frown}{HK} = \overset{\frown}{hk}$、$\overset{\frown}{IL} = \overset{\frown}{il}$,因此 $DS = ds$、$SE = se$,有 $DF = DS - SE$、$df = ds - se$ 故 $DF = df$.

由于 $\triangle PRI \sim \triangle PDF$、$\triangle pri \sim \triangle pdf$ 有

$$\frac{PI}{PF} = \frac{RI}{DF} \tag{1}$$

$$\frac{pf}{pi} = \frac{df}{ri} \tag{2}$$

由 $DF = df$ 代入式(2) 得

$$\frac{pf}{pi} = \frac{DF}{ri} \tag{3}$$

由式(1)×(3) 可得

$$\frac{PI \times pf}{PF \times pi} = \frac{RI}{ri} \tag{4}$$

由于 $\triangle PIQ \sim \triangle PSE$、$\triangle piq \sim \triangle pse$ 有

$$\frac{PI}{PS} = \frac{IQ}{SE} \tag{5}$$

$$\frac{ps}{pi} = \frac{se}{iq} \tag{6}$$

将 $SE = se$ 代入式(6) 可得

$$\frac{ps}{pi} = \frac{SE}{iq} \tag{7}$$

将式(5)×(7) 得

$$\frac{PI \times ps}{PS \times pi} = \frac{IQ}{iq} \tag{8}$$

由式(4)×(8) 得

$$\frac{PI^2 \times pf \times ps}{pi^2 \times PF \times PS} = \frac{RI \times IQ}{ri \times iq} \tag{9}$$

当 $\angle DPE$ 和 $\angle dpe$ 逐渐减小并趋近零时,点 H 逐渐靠近点 R,并最终重合,若不重合,则点 H 不在原直线 PH 上,与前提不符,因此有 RI、IH 及中间弧 $\overset{\frown}{IH}$ 相等,即 $RI = IH = \overset{\frown}{IH}$,同理 $ri = ih = \overset{\frown}{ih}$,代入式(9),得

$$\frac{PI^2 \times pf \times ps}{pi^2 \times PF \times PS} = \frac{IH \times IQ}{ih \times iq} = \frac{\overset{\frown}{IH} \times 2\pi \times IQ}{\overset{\frown}{ih} \times 2\pi \times iq} \tag{10}$$

半圆 AKB、akb 绕直径 AB、ab 旋转形成球面时,$2\pi \times IQ$、$2\pi \times iq$ 为点 I、i 旋转形成圆周的周长. 弧 $\overset{\frown}{IH}$、$\overset{\frown}{ih}$ 旋转形成环面,当 $\angle DPE$ 和 $\angle dpe$ 逐渐减小并趋近零时,$\overset{\frown}{IH}$、$\overset{\frown}{ih}$ 也趋于零,环面面积分别为 $\overset{\frown}{IH} \times 2\pi \times IQ$、$\overset{\frown}{ih} \times 2\pi \times iq$. 小球 P 和小球 p 受到球面的吸引力指向球面方向,引力大小与环面质量成正比,与小球到环面距离的平方成反比. 因此小球 P 和小球 p 受到来自 $\overset{\frown}{IH}$、$\overset{\frown}{ih}$ 形成的环面的引力大小的比值为

$$\frac{F_P}{F_p} = \frac{\dfrac{\overset{\frown}{IH} \times 2\pi \times IQ}{PI^2}}{\dfrac{\overset{\frown}{ih} \times 2\pi \times iq}{pi^2}} = \frac{\dfrac{PI^2 \times pf \times ps}{PI^2}}{\dfrac{pi^2 \times PF \times PS}{pi^2}} = \frac{pf \times ps}{PF \times PS} \tag{11}$$

小球 P 受到 $\overset{\frown}{IH}$ 旋转形成的环面的引力 F_P 可分解为指向球心和垂直于直径的力,由于垂直于直径的分力等于零,因此小球 P 实际受到的力为指向球心的分力,F_P 与该分力的比值为 $\dfrac{PI}{PQ}$. 小球 p 受到 $\overset{\frown}{ih}$ 旋转形成的环面的引力与指向球心的分力的比值为 $\dfrac{pi}{pq}$.

由 $\triangle PIQ \sim \triangle PSF$、$\triangle piq \sim \triangle psf$,得

$$\frac{PI}{PQ} = \frac{PS}{PF} \tag{12}$$

$$\frac{pi}{pq} = \frac{ps}{pf} \tag{13}$$

有

$$\frac{F_P}{F_p} = \frac{\dfrac{pf \times ps \times PF}{PS}}{\dfrac{PF \times PS \times pf}{ps}} = \frac{\dfrac{1}{PS^2}}{\dfrac{1}{ps^2}} \tag{14}$$

同理当 $sd = SD$、$se = SE$ 时,球面上分割得的 $\overset{\frown}{KL}$ 和 $\overset{\frown}{kl}$ 旋转形成的环面作用于小球的引力也满足上述相同关系. 因此,整个球面对小球的引力与它到球心的距离的平方成反比,而任何实心小球都是由无数个同心球面构成. 综上,球外质点与质量均匀的球体间的万有引力,可等效成球的质量集中在球心,从而转化为球心和质点之间的万有引力,证毕.

参考文献

[1] 秦克诚. 关于《邮票上的物理学史》[J]. 大学物理,2005(5):62-64.