研究质心运动 妙解 2023 年高考全国乙卷理综第 25 题第(3) 问

刘　鑫
（瑞金第一中学　江西 赣州　342500）

（收稿日期：2023－06－26）

摘　要：2023 年高考全国乙卷理综第 25 题第(3) 问涉及多次碰撞，如果逐次地去处理各次碰撞将给解答带来庞大的运算量，导致规定的时间内几乎不可能完成. 基于系统的受力特点，研究两者的质心运动，在很大程度上使问题得到了简化，从而巧妙地解决了问题. 最后，运用系统仿真技术和无量纲化处理得出了各自的 $v-t$ 图像，其结果与之前的理论分析吻合得相当之好.

关键词：碰撞；质心；质心运动；系统仿真

1　原题呈现

【题目】(2023 年高考全国乙卷理综第 25 题) 如图 1 所示，一竖直固定的长直圆管内有一质量为 M 的静止薄圆盘，圆盘与管的上端口距离为 l，圆管长度为 $20l$. 一质量为 $m=\dfrac{M}{3}$ 的小球从管的上端口由静止下落，并撞在圆盘中心，圆盘向下滑动，所受滑动摩擦力与其所受重力大小相等. 小球在管内运动时与管壁不接触，圆盘始终水平，小球与圆盘发生的碰撞均为弹性碰撞且碰撞时间极短. 不计空气阻力，重力加速度大小为 g. 求：

(1) 第一次碰撞后瞬间小球和圆盘的速度大小；

(2) 第一次碰撞到第二次碰撞之间，小球与圆盘间的最远距离；

(3) 圆盘在管内运动过程中，小球与圆盘碰撞的次数.

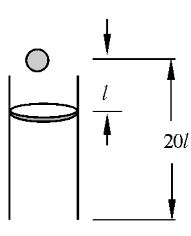

图 1　原题题图

2　试题分析与常规解法及遇到的困境

2.1　试题分析

作为备受瞩目的高考全国卷物理压轴题，该题较好地体现了新课程改革的要求，着重考查了考生的基础知识、关键能力和科学素养，注重了理论与实际的结合，有利于激发学生的探索兴趣和科学热忱. 在设问上，此题采取了低起点、多层次递进的策略. 具体来看，前两问比较简单，理论知识牢靠的考生们应该可以完成且得足基本分，但是，第(3) 问因涉及多次碰撞而难度陡增. 这显然是为了确保顶尖名校选材所必需的区分度，服务科学选材而量身打造的. 因此，对特尖生而言，它的重要性不言而喻. 接下来只讨论第(3) 问.

2.2　常规解法及遇到的困境

已知小球与薄圆盘的质量关系、碰撞类型(弹性碰撞)、系统初始状态(各自的初位置和初速度) 和当地的重力加速度 g. 对两者进行受力分析易知：每次碰后分开到下一次碰撞之前，薄圆盘均向下做匀速直线运动，小球则均以碰后速度为初速度做匀变速直线运动. 基于这些考虑考生会很自然地选择逐次处理各次碰撞的方法，从而得到薄圆盘向下的总位移首次达到或超过 $19l$ 的碰撞次数. 为了更直观地呈现物理过程，考生还会考虑画出两者各阶段的 $v-t$ 图来帮助理解和计算.

这样的解题思路很容易就能够想到，确实也是解决问题的一条途径. 然而，具体操作起来却发现事与愿违. 因为从处理第二次碰撞开始，异常繁杂、庞大的运算量将令人望而却步. 逐次地处理各次碰撞，在考场非常有限的时间内要完成绝非易事，只能“望题兴叹”了. 因此，这一问必将挡住绝大多数考生，

成为摆在他们面前无法横跨的“天堑”. 为了摆脱以上困境,笔者经过认真思考和细致分析,发现研究系统的质心运动对于解决问题有极大的便利. 本文首先简要地介绍一下质心和质心运动定律.

3　质心和质心运动定律

3.1　质心的定义

假设空间中有 n 个质点,用“1”到“n”的连续自然数对它们进行编号. 它们的质量记为 m_1、m_2、m_3、…、m_n,位于空间中的 P_1、P_2、P_3、…、P_n 诸点,而这些点对某一指定的参考点 O 的位矢分别记为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$、…、$\boldsymbol{r}_n$. 如果空间中的 C 点对同一参考点 O 的位矢 $\boldsymbol{r}_C$ 满足以下关系

$$\boldsymbol{r}_C = \overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{1}$$

则称 C 点为质点系的“质心”. 可以看到,$\boldsymbol{r}_C$ 其实是以各质点质量为权重,对诸质点位矢的加权平均值,而 $\boldsymbol{r}_C$ 的末端即为质心位置 C. 它是理论物理学家为了理论研究的方便而引入的概念.

按照速度的定义,易知质心速度 $\boldsymbol{v}_C$ 满足

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{2}$$

3.2　质心运动定律

基于单个质点的牛顿第二定律和一对相互作用力等大、反向、共线的特点(即满足牛顿第三定律),研究质点系的动力学问题时很容易发现一个类似于“单质点牛顿第二定律”的结论:所有外力的矢量和等于整个质点系的总质量乘以质心的加速度. 或者说等效于把所有质量和外力集中在质心这个假想的质点上,而且它满足牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F}_{外合} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \boldsymbol{a}_C \tag{3}$$

故质点系受已知的外力作用时,虽然每个质点究竟如何运动可能无法知晓,但质心的运动是确定的,而且它与质点系的内力无关.

4　研究质心运动解决原题中的问题

为了更简便地解决原题中的问题,笔者尝试研究质心的运动. 在此之前,通过转换参考系得出了一些必要的、有用的结论.

分析:除碰撞瞬间外,薄圆盘均向下做匀速直线运动. 倘以它作为参考系,则属惯性参考系,牛顿第二定律无需修正便可直接使用. 除碰撞瞬间外,小球相对薄圆盘均做加速度为 g 的匀变速直线运动. 由弹性碰撞的特点可知,两者碰撞前的接近速度和碰撞后的分离速度大小均为 v_0;由受力分析可知,系统合外力恒定,质心向下做匀加速直线运动.

解:相对薄圆盘,每次碰撞前小球总是以 v_0 撞下来,碰撞后它又以 v_0 反弹上去. 因此,相邻的两次碰撞的时间间隔均为

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g} \tag{4}$$

以薄圆盘的初始位置作为坐标原点,竖直向下为正方向建立坐标轴;以小球与薄圆盘的首次碰撞瞬间作为计时起点. 由式(1)可知,系统(薄圆盘和小球)质心的初始位置恰在坐标原点,即

$$x_{C0} = 0 \tag{5}$$

由式(2)可知,质心的初始速度

$$v_{C0} = \frac{mv_0}{m+M} = \frac{v_0}{4} \tag{6}$$

系统的合外力恒定,由式(3)可知,质心向下做加速度恒为 $\boldsymbol{a}_C$ 的匀加速直线运动且满足

$$(M+m)g - F_f = (M+m)a_C$$

$$a_C = \frac{g}{4} \tag{7}$$

方向竖直向下. 特别指出:碰撞力属内力,不影响质心运动,所以 $\boldsymbol{a}_C$ 不受碰撞的影响. 发生第 n 次碰撞时(小球、薄圆盘和系统质心三者重合),运动的总时间 t 为

$$t = (n-1)\Delta t \tag{8}$$

考虑到质心有初速度,时间 t 内质心向下的位移

$$\Delta x_C = v_{C0}(n-1)\Delta t + \frac{1}{2}a_C[(n-1)\Delta t]^2 \tag{9}$$

临界条件满足以下关系时,薄圆盘即将冲出薄圆管

$$\Delta x_C = v_{C0}(n-1)\Delta t + \frac{1}{2}a_C[(n-1)\Delta t]^2 = 19l \tag{10}$$

解得

$$n = \sqrt{\frac{77}{4}} + \frac{1}{2} \approx 4.89 \text{(另一负根已舍去)} \tag{11}$$

则有

$$4 < n < 5 \tag{12}$$

可以完成 4 次碰撞.

点评：逐次地处理各次碰撞将给解题带来庞大的运算量和繁杂的过程. 碰撞力属内力，并不影响质心运动；发生碰撞时小球、薄圆盘和系统质心三者重合. 对系统质心的运动进行研究，可以巧妙地摆脱以上困境，解答取得了出奇制胜的效果. 令人不禁感叹，质心真好用，质心解题真妙，物含妙理总堪寻.

此外，值得一提的是：第一次碰撞前，小球以速度 v_0 向下撞向之前静止的薄圆盘；第一次碰撞后，薄圆盘由静止获得了大小为$\frac{v_0}{2}$ 的向下速度. 除碰撞外，倘以与薄圆盘共速的惯性系为参考系，笔者发现每次的碰撞都是“一动碰一静”的模型，且相对速度均为 v_0. 这竟然与第一次碰撞完全一样. 这就意味着每碰撞一次薄圆盘的对地速度均增加$\frac{v_0}{2}$，也就是说碰撞 n 次后它的速度为

$$v_{Mn} = n\frac{v_0}{2}$$

同时，如前所述，相邻两次碰撞的时间间隔恒为

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}$$

所以相邻两次碰撞间，薄圆盘的对地位移为等差数列，即

$$x_1 = v_{M1}\Delta t = 2l$$

$$x_2 = v_{M2}\Delta t = 4l$$

$$x_3 = v_{M3}\Delta t = 6l$$

$$x_4 = v_{M4}\Delta t = 8l$$

判据 $x_1 + x_2 + x_3 = 12l < 19l < x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20l$. 至此，说明碰撞了 4 次. 问题同样被轻松地解决了.

5　软件系统仿真

为了充分发挥现代技术在物理规律探索方面的优势，西南大学银翔实验中学的苏翔老师用 python 编写代码，用 vpython 库对该问题进行了系统仿真，并把 $v_0 = \sqrt{2gl}$ 和 $t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ 分别规定为速度和时间的单位“1”，得出了两者的 $v-t$ 图如图 2 所示. 其结果与本文之前的理论分析吻合得非常好，这就证明了之前的理论分析完全正确.

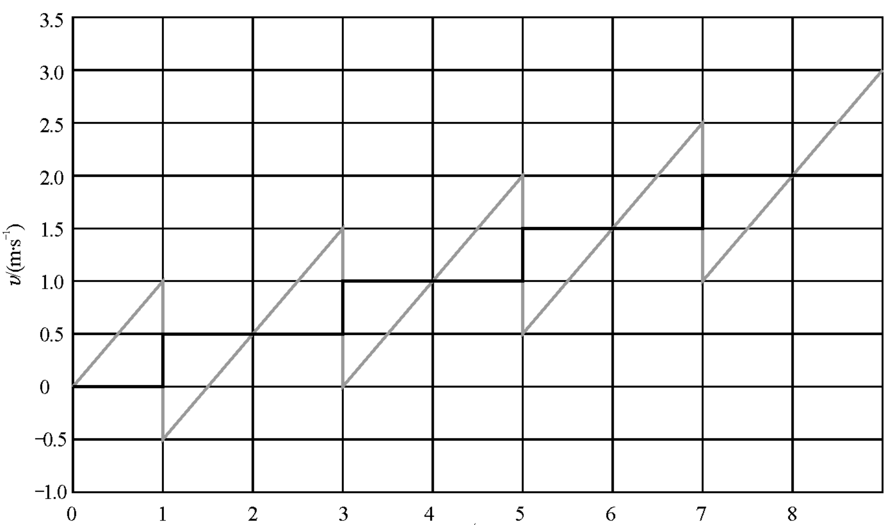

图 2　$v-t$ 图

6　总结和展望

多次碰撞的问题，如果按照常规的方法以及结合各阶段的 $v-t$ 图来处理，往往具有运算量庞大、过程繁杂的特点. 由于质心运动完全由系统初始状态和系统所受外力决定，不受内力的影响. 遇到这类问题时，可以尝试研究更为简单的质心运动来解决. 同时，遇到困难，合理地转换参考系为问题的解决提供了一个全新的视角和可能.

个人认为：虽然质心、质心运动定律等相关知识均不在高考考查内容之列，但是“会当凌绝顶，一览众山小”，对于学有余力的理科特尖生，高中教师可以引导他们适当地学一些高考范围之外的知识或带领他们涉猎部分高中物理竞赛的初步内容. 登高方能望远，这对他们拓宽视野、提高能力必将大有裨益.