

解读金属框在磁场轨道上的运动

——剖析2023年全国新课标卷压轴题

高学冬 徐正海

(安徽省当涂第一中学 安徽 马鞍山 243100)

(收稿日期:2023-07-02)

摘要:通过对2023年普通高等学校招生全国统一考试新课标卷(理综)第26题中金属方框穿越磁场的“三层”分析,试图剖析出明了的物理图景.

关键词:动生电动势;电磁感应回路;等效电源;动量定理;能量转化及守恒定律

在中学物理电磁感应问题中,从感应电动势起源可分为动生电动势和感生电动势两个类型,而动生电动势及其相关的电磁感应回路并不是一成不变的.2023年普通高等学校招生全国统一考试新课标卷的压轴题就给我们提供了一个很好的范例,由此引发笔者3个层面的思考.

1 原题呈现

【题目】一边长为 L 、质量为 m 的正方形金属细框,每边电阻为 R_0 ,置于光滑的绝缘水平桌面(纸面)上.宽度为 $2L$ 的区域内存在方向垂直于纸面的匀强磁场,磁感应强度大小为 B ,两虚线为磁场边界,如图1(a)所示.

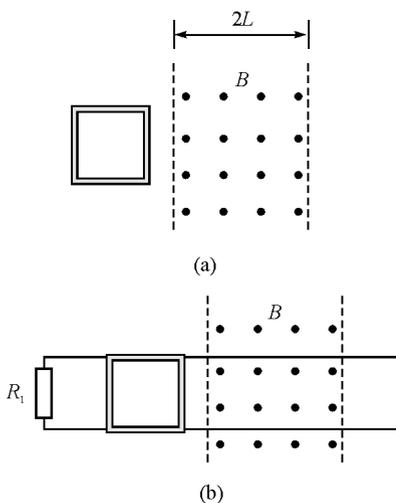


图1 题目题图

(1)使金属框以一定的初速度向右运动,进入磁场.运动过程中金属框的左、右边框始终与磁场边

界平行,金属框完全穿过磁场区域后,速度大小降为它初速度的一半,求金属框的初速度大小.

(2)在桌面上固定两条光滑长直金属导轨,导轨与磁场边界垂直,左端连接电阻 $R_1 = 2R_0$,导轨电阻可忽略,金属框置于导轨上,如图1(b)所示.让金属框以与(1)中相同的初速度向右运动,进入磁场.运动过程中金属框的上、下边框处处与导轨始终接触良好.求在金属框整个运动过程中,电阻 R_1 产生的热量.

2 常规分析

【析与解】

(1)首先,金属框右边框以 v_0 进入磁场,直到其左边框刚抵达左边界(记此时速度为 v)作为第一过程,右边框是电源,提供回路电流使金属框在安培力的作用下做减速运动,与此同时,安培力的冲量及安培力做功分别改变着金属框的动量和动能,比较而言,动量定理与电磁感应定律之间能够架设一座畅通的桥梁,设某位置金属框(回路)中感应电流为 i ,在 Δt 时间内,则由动量定理得

$$-\sum BiL \Delta t = mv - mv_0 \quad (1)$$

式中

$$\sum i \Delta t = q \quad (2)$$

为通过框横截面的电荷量.

根据电磁感应定律

$$q = \frac{E}{4R_0} \Delta t = \frac{\Delta \Phi}{4R_0 \Delta t} \Delta t = \frac{BL^2}{4R_0} \quad (3)$$

金属框整体在磁场区域内运动为第二过程,由于没有电磁感应电流,它做匀速直线运动.

接下来,金属框穿出磁场右边界,速度为 $\frac{v_0}{2}$,这是最后一个过程,同理有

$$- \sum BiL \Delta t = m \frac{v_0}{2} - mv \quad (4)$$

联立式(1)~(4)得到金属框初速度为

$$v_0 = \frac{B^2 L^3}{mR_0}$$

(2) 当将金属框放置在如图1(b)的导轨上,以相同的初速度 v_0 重新进入这一磁场区域时,电磁感应的回路悄悄发生了变化.假设金属框右边框通过左边界运动距离不超过 L ,它为电源,有趣的是,金属框上、下两边框被导轨“短路”,如此一来,金属框左边框 R_0 与 R_1 并联作为负载 $R = \frac{2R_0}{3}$,与问题(1)处理方法一致,可得到金属框刚好全部进入磁场时的速度为

$$v_1 = \frac{2B^2 L^3}{5mR_0}$$

再由电路结构并结合能量转化及守恒定律可知电阻 R_1 上产生的热量 Q_{11} 满足

$$Q_{11} + 2Q_{11} + 4.5Q_{11} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

从而有

$$Q_{11} = \frac{7B^4 L^6}{125mR_0^2}$$

接下来,整个金属框进入磁场区域,以 v_1 的速度继续向右运动,金属框上、下两边框仍被导轨“短路”,而左、右边框构成“双电源”,电磁感应回路又一次发生变化,如图2所示.

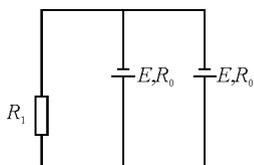


图2 “双电源”过程

“双电源”可等效为“单电源”(电动势为 E ,内阻为 $\frac{R_0}{2}$),设金属框继续运动 x 距离时的速度为 v_x ,同理有

$$- BLq_x = mv_x - mv_1$$

式中

$$q_x = \frac{2BLx}{5R_0}$$

整合两式得到

$$v_x = \frac{2B^2 L^2}{5mR} (L - x)$$

该式说明 $x=L$,即金属框右边框刚到磁场右边界时停止运动,结合电路结构和能量转化与守恒定律,这一过程电阻 R_1 上产生的热量 Q_{12} 满足

$$Q_{12} + \frac{1}{4}Q_{12} = \frac{1}{2}mv_1^2$$

则

$$Q_{12} = \frac{8B^4 L^6}{125mR_0^2}$$

综合全程可得, R_1 上所产生的热量为

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} = \frac{3B^4 L^6}{25mR_0^2}$$

3 原题拓展

为进一步探讨上面所关注的“电动势”“回路”和“规律”的“三层”含义,笔者在原题基础上重新设置一问题如下:

【问题】给金属框的“三边框”,即上、下两边框及右边框都穿上光滑的“绝缘”外衣,并保证金属框左边框与导轨始终良好接触,试问,再让金属框以问题(1)中的初速度进入磁场,求在金属框整个运动过程中,电阻 R_1 产生的热量.

【析与解】

以问题(2)的进程进行探究,首先,在金属框右边框向右运动 L 的距离时,记此时金属框速度为 v_2 ,右边框是电源,外电路结构为 R_1 与左边框电阻 R_0 并联,再与上、下两边框电阻 $2R_0$ 串联,外电路的电阻 $R = \frac{8R_0}{3}$,由动量定理得

$$- BLq = mv_2 - mv_0$$

其中

$$q = \frac{BL^2}{R + R_0} = \frac{3BL^2}{11R_0}$$

故

$$v_2 = \frac{8B^2 L^3}{11mR_0}$$

根据电路结构及能量守恒有

$$Q_{11} + 2Q_{11} + 13.5Q_{11} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

从而得

$$Q_{11} = \frac{57B^4L^6}{3\ 993mR_0^2}$$

其次,当金属框刚好全部进入磁场,左、右两边框都成为电源,左边框电源电动势为 E ,内阻为 R_0 ,右边框电源电动势为 E ,内阻视为 $3R_0$,两电源“等效”为单电源,其电动势为 E ,内阻为 $\frac{3R_0}{4}$,同样会有

$$-BLq_{x_1} = mv_{x_1} - mv_2$$

其中

$$q_{x_1} = \frac{BLx_1}{R_1 + \frac{3R_0}{4}} = \frac{4BLx_1}{11R_0}$$

整合得

$$v_{x_1} = \frac{4B^2L^2}{11mR_0}(2L - x_1)$$

则当 $x_1 = L$ 时,即金属框右边框刚穿出磁场右边界时,速度为

$$v_3 = \frac{4B^2L^3}{11mR_0}$$

据电路结构及能量转化与守恒得

$$Q_{12} + \frac{3}{8}Q_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_3^2$$

则

$$Q_{12} = \frac{192B^4L^6}{1\ 331mR_0^2}$$

最后,当金属框右边框刚穿出磁场右边界时,金属框左边框成为电源,电路外电阻为 R_1 与 $3R_0$ 并联,其大小为 $R = \frac{6R_0}{5}$,金属框继续运动 x_2 距离时,同理有

$$-BLq_{x_2} = mv_{x_2} - mv_3$$

其中

$$q_{x_2} = \frac{BLx_2}{R + R_0} = \frac{5BLx_2}{11R_0}$$

整理有

$$v_{x_2} = \frac{B^2L^2}{11mR_0}(4L - 5x_2)$$

即当 $x_2 = \frac{4L}{5}$ 时,金属框停止运动,还是电路结构决定了能量分配,有

$$Q_{13} + \frac{2}{3}Q_{13} + \frac{25}{18}Q_{13} = \frac{1}{2}mv_3^2$$

则

$$Q_{13} = \frac{144B^4L^6}{6\ 655mR_0^2}$$

全程累加得 R_1 上所产生的热量为

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} = \frac{3\ 597B^4L^6}{19\ 965mR_0^2} \approx \frac{9B^4L^6}{50mR_0^2}$$

4 寻幽入微

众所周知,数学是物理学总结的最高语言.

对金属框进入磁场作细微分析,对问题(1)而言:

我们首先建立它的运动方程, $-BiL = ma$, 进而而是

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{4mR_0}dt$$

若记 $k = \frac{B^2L^2}{4mR_0}$, 则

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -kdt$$

从而有

$$v = v_0 e^{-kt} = 4kL e^{-kt}$$

金属框的位移 x , 有

$$x = \int_0^t v dt = 4L(1 - e^{-kt})$$

合并有

$$v = k(4L - x)$$

再考查金属框受到安培力做功方面的问题, 则有

$$W = \int_0^x -BiL dx = -\int_0^x mkv dx =$$

$$\frac{1}{2}mk^2(x^2 - 8Lx) = 8mk^2L^2(e^{-2kt} - 1)$$

最后,安培力的冲量

$$I = \int_0^t -BiL dt = -\int_0^x mk dx = -mkx = 4mkL(e^{-kt} - 1)$$

上面的表达式都是时间 t 的幂函数,它们表达了有安培力参与作用时,给金属框带来的运动性质、动量改变及动能改变都具有复杂性.

当然,金属框穿出磁场与进入磁场的物理规律是一样的,这里就不再赘述了.

5 结束语

通过以上分析可以看出,关于中学物理“动生电动势”的相关问题,笔者认为,应该关注这3个层面的问题.首先,电动势如何产生,它是问题的“底层”逻辑;其次是,电磁感应回路(结构)的寻找,它是能量转化的“中层”舞台;最后,运用动量定理及能量守恒与转化定律解决问题,这才是“上层”最美妙的乐章.