

流体阻力和抛射高度对抛射体运动规律的影响研究*

易婉 周琪

(湖南科技大学物理与电子科学学院 湖南湘潭 411201)

陆振烟

(湖南科技大学物理与电子科学学院 湖南湘潭 411201;
智能传感器与新型传感材料湖南省重点实验室 湖南湘潭 411201)

麻志君 周海霞

(湖南科技大学物理与电子科学学院 湖南湘潭 411201)

(收稿日期:2023-10-24)

摘要:从动力学方程出发,定量分析阻力大小和抛射高度对抛体运动最佳抛射角的影响.结果表明,阻力系数不为零且给定抛射高度时,最佳抛射角先是随初速度的增加而急剧上升,到达某一个极大值后转为平缓地单调下降.而当阻力系数保持不变时,最佳抛射角随初速度的变化行为与抛射高度密切相关.但不管阻力系数和抛射高度取任何非负值,抛体运动最佳抛射角均小于 45° .另外,在其他参量保持不变的前提下,抛体运动最佳抛射角均是随抛射高度和阻力系数的增大而单调减小.

关键词:抛体运动;阻力;抛射高度;最佳抛射角

在物理学中,抛体运动的相关研究是极为重要的内容,其中最简单也是最常见的模型为:不考虑流体阻力的影响,且抛出点与落地点处在同一水平线上,此时的抛体运动的轨迹是一条关于通过最高点的垂线左右对称的抛物线,最佳抛射角为 45° ^[1],且该角度与抛体初速度和质量均无关.但当抛射点与落地点不在同一条水平线上时,抛体的最佳抛射角会随着抛射高度的增加而减小.在忽略空气阻力的前提下,文献[2]研究了运动员身高和手臂长度对铅球运动成绩的影响,结果表明运动员肩膀高度的差异对抛射速度的影响非常小,但对最大射程有一定影响,差别约为几十厘米,且肩膀高度越高,最佳抛射角越小而最大射程越大.在将理论计算结果与国内著名铅球运动员的比赛数据进行比较后,发现假若运动员的实际抛射角越接近理论预测的最佳抛射角,则射程越远,反之则射程越

近.这表明理论计算结果的可信赖程度高.

自然界和军事活动中,常常能见到高速飞行的物体.而当流体密度比较大或飞行物体速度很大时,流体阻力对飞行物体的影响将变得不可忽略^[3].在文献[4]中,考虑空气阻力与速度成正比的条件下,利用拉格朗日乘子法推导和研究了斜面上抛射物体运动规律,而文献[5-6]则考虑了空气阻力与速度的平方成正比情形下,通过Matlab数值求解其常微分方程,分析了射程、射高和飞行时间与初始角度之间的关系.但这些讨论仅局限于斜面抛体或抛出点和落地点在同一水平线上的情形,而且并没有将阻力、初速度、抛射高度对抛体运动的影响进行综合考虑.因此,本研究将从抛体动力学方程出发,推导一般情形下抛体运动轨迹方程,并进行数值计算和作图,从理论上探究阻力、初速度和抛射高度对抛体运动最佳抛射角的

* 国家自然科学基金,项目编号:12205093;湖南省自然科学基金,项目编号:2021JJ40188;湖南科技大学教学改革研究项目,项目编号:G32117;湖南科技大学大学生创新训练项目,项目编号:S202110534058.

作者简介:易婉(2004-),女,在读本科生.

通讯作者:陆振烟(1987-),男,博士,副教授,主要从事物理教学和理论物理研究工作,研究方向为粒子物理与天体物理.

影响.

1 考虑阻力的抛体运动模型

我们假设抛体的质量为 m , 抛射速度为 v_0 , 抛射高度为 L . 如图 1 所示, 建立直角坐标系 xOy , 质量为 m 的物体从原点 O 正上方 L 处以大小为 v_0 的初速度抛出, 初速度与 x 轴方向的夹角为 θ , 运动时间为 t 时的速度为 v . 当抛体轨迹与直线 $y=0$ 相交时, 交点与原点的水平距离即为抛体的射程, 记为 X .

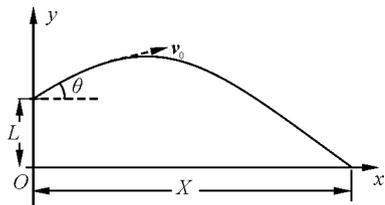


图 1 抛体运动示意图

在流体中运动的物体, 其所受阻力通常与运动速度的幂次相关^[7]. 为了简单起见, 我们考虑阻力大小与抛体速度成正比关系^[8-9], 即

$$f = -kv \quad (1)$$

对于抛体运动, 我们可以将运动分解为沿着 x 和 y 轴方向的变速直线运动. 根据牛顿第二定律, 考虑阻力的 x 和 y 方向的动力学方程为

$$\begin{cases} -kv_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ -kv_y - mg = m \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

当 $t=0$ 时, 有初始条件 $x=0, y=L, v_x=v_0 \cos \theta, v_y=v_0 \sin \theta$. 对式(2)进行分离变量, 并结合初始条件积分得到抛体运动在 x 和 y 方向的速度大小为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \exp\left(\frac{-kt}{m}\right) \\ v_y = \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \theta\right) \exp\left(\frac{-kt}{m}\right) - \frac{mg}{k} \end{cases} \quad (3)$$

进一步对式(3)进行积分, 可得到物体在 x 和 y 两个方向的运动学方程为

$$\begin{cases} x = \frac{m}{k} v_0 \cos \theta \left[1 - \exp\left(\frac{-kt}{m}\right) \right] \\ y = \frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \theta \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-kt}{m}\right) \right] - \frac{mg}{k} t + L \end{cases} \quad (4)$$

再利用消元法消去时间 t 可求得抛体运动的轨迹方程为

$$y = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \theta \right) + \left(\frac{m}{k} \right)^2 g \ln \left(1 - \frac{kx}{m v_0 \cos \theta} \right) + L \quad (5)$$

假设物体落到水平地面的射程为 X , 由式(5)可知抛体射程 X 满足如下超越方程

$$\exp \left\{ - \left(\frac{k}{m} \right)^2 \left[\frac{L}{g} + \frac{X}{g v_0 \cos \theta} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \sin \theta \right) \right] \right\} + \frac{kX}{m v_0 \cos \theta} - 1 = 0 \quad (6)$$

很显然, 无法从上述超越方程中直接反解出抛体射程的显式表达式. 与文献[8]中采用近似法求解超越方程的解不一样, 我们利用数学软件编写代码对其数值求解, 并最终通过作图软件进行绘图, 更加详细及直观展示阻力及抛射高度对抛体最佳抛射角的影响, 具体数值计算结果将在下面进行详细展示和讨论.

2 数值计算结果及分析

阻力对速度大的抛体运动曲线的影响一般不可忽略. 图 2 给出初速度 $v_0 = 100 \text{ m/s}$ 和阻力系数 $\frac{k}{m}$ 为 0、0.1、0.2、0.5 时抛体的抛射曲线. 可以看到: 阻力为零的实线所对应的射高和射程均大于其他几条曲线, 且该曲线关于过曲线最高点的 x 轴中垂线对称. 而当阻力系数逐步增大, 抛体的射程及射高均相应减小, 且曲线不再相对于过曲线最高点的 x 轴中垂线对称, 而是随着阻力的增大, 抛体落地时的速度方向越接近竖直向下, 曲线的不对称度也越为明显.

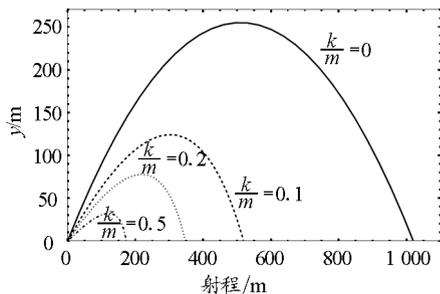


图 2 抛体运动轨迹与流体阻力的关系

2.1 阻力及初速度对抛体最佳抛射角的影响

图3给出抛射高度 $L=2\text{ m}$ 及阻力系数 $\frac{k}{m}=0, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2$ 时最佳抛射角随抛体初速度的变化曲线. 对于 $\frac{k}{m}=0$ 的情形, 随着初速度的增大, 最佳抛射角先是急速增加, 随后趋于饱和并逐渐趋近于 45° . 这对应于不考虑阻力的情形. 但由于抛射高度不为零, 此时的最佳抛射角随初速度的增大而增大, 并最终趋于 $L=0$ 时的最佳抛射角 45° , 说明随着抛射速度的增加, 抛射高度对最佳抛射角的影响不断弱化. 而当阻力不为零时, 最佳抛射角先是随着速度的增大而单调且迅速增大, 当增加到某一个极大值之后, 随初速度的增加而单调减小. 阻力系数越大, 极大值所对应的最佳抛射角越小, 且其位置向更小的初速度移动. 通俗地讲, 当抛体(比如子弹)速度很大时, 速度越大, 抛射角度越小越能获得最大射程.

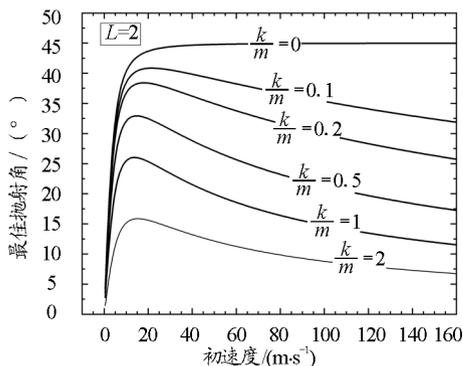


图3 抛射高度 $L=2\text{ m}$ 时, 最佳抛射角随初速度的变化关系

为了研究最佳抛射角随阻力系数 $\frac{k}{m}$ 的变化行为, 我们在图4中给出抛射高度 $L=10\text{ m}$ 及初速度 $v_0=5\text{ m/s}, 10\text{ m/s}, 20\text{ m/s}, 50\text{ m/s}, 100\text{ m/s}, 200\text{ m/s}$ 时, 最佳抛射角随阻力系数的变化曲线. 从整体上看, 抛体运动最佳抛射角均是随着阻力系数的增加而单调减小; 当初速度较小时, 其对应的最佳抛射角也较小, 且曲线下降较为平缓; 而初速度较大时, 其对应的最佳抛射角较大(若初速度足够大, 曲线的左端所对应的最佳抛射角甚至可以无限趋近 45°), 曲线下降明显. 但无论抛射初速度是较大还是较小, 在抛射高度及初速度都确定的条件下, 最佳抛射角都随着阻力的增大而减小, 且变化趋势逐渐变得平

缓, 最后趋于零值.

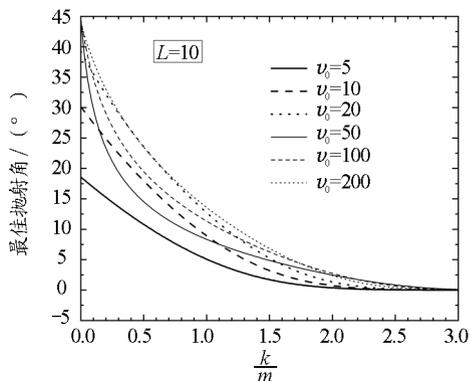


图4 抛射高度 $L=10\text{ m}$ 时, 最佳抛射角随阻力系数的变化关系

2.2 流体阻力、初速度及抛射高度对抛体最佳抛射角的影响

为了从多方面展示最佳抛射角随阻力系数的变化关系, 我们在图5中描绘了初速度 $v_0=100\text{ m/s}$ 以及抛射高度 $L=2\text{ m}, 5\text{ m}, 10\text{ m}, 20\text{ m}, 50\text{ m}, 100\text{ m}, 200\text{ m}$ 的条件下所得到的最佳抛射角与阻力系数的变化曲线. 这几条单调下降的曲线表明最佳抛射角随空气阻力系数的增大而减小; 当抛射高度较小时, 其对应的最佳抛射角较大, 并且曲线的下降相对而言也较为平缓; 而当抛射高度较大时, 曲线下降的速度更大一些, 其中对应于 $L=100\text{ m}, 200\text{ m}$ 的两条曲线甚至几乎呈直线型下降. 但无论抛射高度是大还是小, 在抛射高度与初速度确定的情况下, 最佳抛射角都是随着空气阻力系数的增大而减小, 且变化趋势逐渐变得平稳, 最后趋于一个稳定的值.

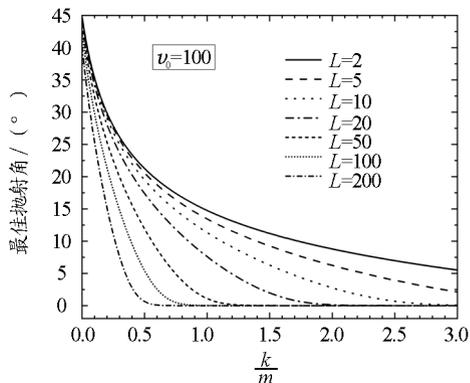


图5 初速度 $v_0=100\text{ m/s}$ 时, 最佳抛射角随阻力系数的变化关系

图6给出了阻力系数 $\frac{k}{m}=0.5$ 及 $L=0\text{ m}, 5\text{ m}, 10\text{ m}, 50\text{ m}, 100\text{ m}, 200\text{ m}$ 时最佳抛射角随初速度的变化曲线. 当 $L=0$ 时, 随着初速度的不断增大, 阻

力对抛体运动的阻碍作用也逐步增大,最佳抛射角的下降趋势变缓.当初速度趋于零时,最佳抛射角趋于 $\frac{k}{m} = 0$ 时的最佳抛射角 45° .这说明随着初速度的不断减小,空气阻力对抛体运动的影响不断地弱化,即在低速环境下的抛体运动,阻力对抛体运动的影响较小,符合我们经验和预期.但当抛射高度不为零且抛射高度较小时,最佳抛射角随初速度的变化行为呈现非单调行为:先是从零值开始迅速上升到一个最高值,后平缓下降.当抛射高度很大时,最佳抛射角随初速度单调缓慢上升.

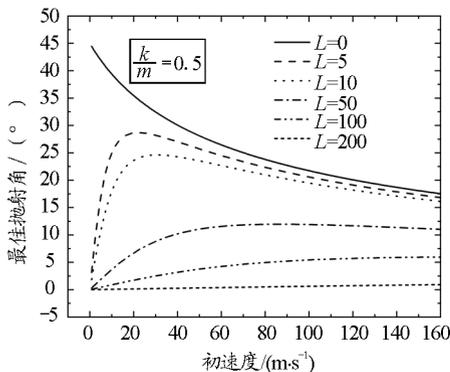


图6 阻力系数 $\frac{k}{m} = 0.5$ 时,最佳抛射角随初速度的变化关系

图7是在初速度 $v_0 = 100 \text{ m/s}$ 以及 $\frac{k}{m} = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 2$ 条件下所绘制的最佳抛射角随抛射高度的变化曲线.可以从图中看出,在阻力系数较小时,最佳抛射角随着抛射高度的不断增加而缓慢减小;在阻力系数较大时,最佳抛射角先是迅速下降到零值附近,然后再缓慢趋于零值.总的来讲,在空气阻力存在的情况下,抛体的最佳抛射角会随着抛射高度的增加而减小.而即使抛射高度为零,其最佳抛射角也仍然会小于 45° .

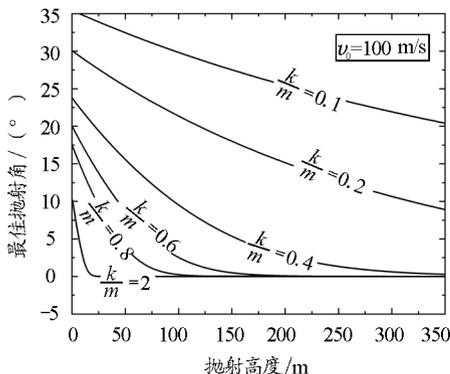


图7 初速度 $v_0 = 100 \text{ m/s}$ 时,最佳抛射角随抛射高度的变化关系

3 结论

流体阻力对高速飞行物体的影响通常不可忽略.本文从抛体的动力学方程出发,推导考虑阻力和抛射高度影响下抛体运动的轨迹方程,借助数学软件进行数值计算和绘图,定量研究了阻力和抛射高度对抛体运动规律的影响,得出以下结论.

(1) 对于阻力系数 $\frac{k}{m} = 0$ 但抛射高度不为零的抛体运动,为获得最大射程,其最佳抛射角随着初速度的增大而单调增大,并最终趋于 45° .

(2) 当阻力系数 $\frac{k}{m} \neq 0$ 时,存在如下两种情况.

- 1) 在初速度不大的情况下,最佳抛射角先是随着初速度的增大而迅速增大,而在达到某一个极大值之后,最佳抛射角随着初速度的增大而单调下降.
- 2) 当初速度足够大时,只要抛射高度与阻力系数两个影响因素中有一个不为零,最佳抛射角均随着抛射高度(或阻力系数)的增大而不断减小.

参考文献

- [1] 漆安慎,杜婵英.力学[M].4版.北京:高等教育出版社,2021.
- [2] 麻志君,杨颖,付响云,等.铅球运动最佳抛射角和最大射程的理论研究[J].物理与工程,2022,32(3):29-35.
- [3] 廖旭,任学藻,周自刚.非理想抛体的最佳抛射角[J].大学物理,2007,26(8):20-22.
- [4] 喻莉,杨植宗,何艳,等.考虑空气阻力的抛体最大射程和最佳抛射角研究[J].空军雷达学院学报,2010,24(6):452-453.
- [5] 易小爱,凌晓菲,张振美,等.空气阻力与速度平方成正比的抛体运动研究[J].大学物理实验,2020,33(3):57-60.
- [6] 郭雪鹏.考虑空气阻力与速度平方成正比的斜抛运动[J].物理通报,2017(6):63-66.
- [7] 代超超,杨凯,龙妹明.空气阻力与球体运动速度的函数关系[J].物理与工程,2013,23(4):61-64.
- [8] 郝成红.考虑空气阻力的抛体射程[J].大学物理,2008,27(12):21-22.
- [9] 郭雪鹏.考虑空气阻力的斜抛运动研究[J].物理教学,2017,39(4):14-16.

(下转第34页)

育出版社,2018.

19-23.

[3] 刘惠莲. 大学物理实验[M]. 北京:科学出版社,2013.

[5] 朱家昆,蔡亚璇,陈勇,等. 类比法在大学物理电磁学教

[4] 孟旭东. 电磁学教学改革与实践[J]. 物理通报,2019(5):

学中的运用[J]. 教育教学论坛,2017(11):199-200.

Innovative Design on Electromagnetics Experiment Course Teaching

ZHANG Pingli

(School of Physics, Jilin Normal University, Siping, Jilin 136000)

Abstract: Electromagnetism experiment is a basic course of physics major. It requires students to master the basic principles and debugging methods of commonly used electromagnetic instruments, so that students can have a certain degree of understanding and knowledge of basic experiment ideas and methods of electromagnetism, and lay a solid foundation for further theoretical learning, experimental training and scientific research. Combining with the teaching practice of Jilin Normal University, an innovative design of electromagnetism experiment course is carried out.

Key words: electromagnetics experiment; teaching innovation; teaching evaluation

(上接第 30 页)

Research on the Influence of Fluid Resistance and Ejection Height on the Motion Law of Projectiles

YI Wan ZHOU Qi

(School of Physics and Electronics, Hunan University of Science and Technology, Hunan, Xiangtan 411201)

LU Zhenyan

(School of Physics and Electronics, Hunan University of Science and Technology, Hunan, Xiangtan 411201)

(Hunan Provincial Key Laboratory of Intelligent Sensors and Advanced Sensor Materials, Xiangtan, Hunan 411201)

MA Zhijun ZHOU Haixia

(School of Physics and Electronics, Hunan University of Science and Technology, Hunan, Xiangtan 411201)

Abstract: Starting from the dynamic equations, the effects of resistance magnitude and projectile height on the optimal projectile angle are quantitatively analyzed. It is shown that when the resistance coefficient is not zero and given the projectile altitude, the optimum projection angle first rises sharply with the initial velocity, and decreases gently and monotonically after reaching a certain maximum. When the resistance coefficient is kept constant, the changing behavior of the optimum projection angle with the initial velocity is closely related to the projectile altitude. However, regardless of any non-negative value of the resistance coefficient and the projectile altitude, the optimum projection angle of the projectile motion is less than the 45-degree angle of the ideal situation. In addition, while the other parameters remain unchanged, the optimum projection angle of the projectile motion decreases monotonically as the projectile altitude and the resistance coefficient increase.

Key words: projectile motion; resistance; projectile altitude; optimum projection angle