



基于“STEM”理念下的“最速降线”探究

张金州

(长兴县太湖高级中学 浙江 湖州 313100)

(收稿日期:2019-12-20)

摘要:“STEM”理念是结合科学、技术、工程、数学的跨学科、跨领域的综合素质理念。“最速降线”是指物体在只受重力的情况下,从A点运动到B点所用时间的最小值.从“STEM”理论的角度对“最速降线”进行更为系统的探究,以便更好地理解和应用“最速降线”问题.

关键词:STEM 最速降线 理念 模式

1 概念的提出

“STEM”是科学(Science),技术(Technology),工程(Engineering),数学(Mathematics)4门学科英文首字母的缩写,其中科学在于认识世界、解释自然界的客观规律;技术和工程则是在尊重自然规律的基础上改造世界、实现对自然界的控制和利用、解决经济和社会发展过程中遇到的难题;数学则作为技术与工程学科的基础工具.

意大利科学家伽利略在1630年提出一个分析学的基本问题——“一个质点在重力作用下,从一个给定点到不在它垂直下方的另一点,如果不计摩擦力,问沿着什么曲线滑下所需时间最短.”尽管伽利略自己给出了“该曲线为圆”的错误答案,但是却为问题的解决指明了方向.在1696年瑞士数学家约翰·伯努利再次提出这个“最速降线”的问题并给出了正确解答,他还拿这个问题向其他数学家提出了公开挑战.最后牛顿、莱布尼兹、洛必达和伯努利家族的成员等解决了这个问题,求出的“最速降线”为旋轮线.

目前在中学阶段关于“最速降线”的问题仅为“谁先达到斜面底端”的简单问题求解与一些简单应用说明,而更高层次的研究与论述主要集中在“数学物理方法”层面,即仅在物理知识层面采用数学知识的阐述,这些阐述往往过于复杂,需要相当的数学知识才能有较为深刻的认识,而鲜有更系统性的分析以适应更多学习层次的论述.本文将从“STEM”理论的角度对“最速降线”问题进行探究.

2 基于“S”与“M”的分析

1696年,贝塞大学的伯努利提出了以下问题:如图1所示,在竖直平面内给定两点A和B,要寻找路径AMB,使得质点以最短的时间滑过该路径,假定质点的加速度仅仅来自重力作用,这就是有名的“最速降线”问题.通过数学物理方法得到其方程为

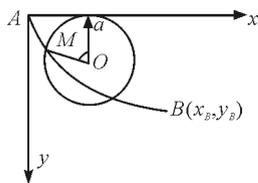


图1 最速降线问题示意图

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

式(1)即为“最速降线”问题的解,质点只在重力作用下沿此线下滑的速度最快、用时最短.其推导过程就不在这里推导了.

从科学与数学角度进行的分析与推导极为成功的获得了“最速降线”,但正处在中学阶段的普通学生将难以理解,因此,有必要将该问题进行合理简化的分析.

3 基于“S”与“M”的简化模型分析

“最速降线”的求解对于中学生来说要求较高,知识综合性较强,特别是其中涉及的数学运算;因此有必要将分析进行简化,成为一般学习能力的学生都可以探究分析的内容.现结合伯努利的思维方式和斯涅耳定律以寻求较为简化的模型分析^[1].

如图2建立坐标系,设A为坐标原点,B点坐标为(C,H),若用几个平行于x轴的带状区域将这一区域分成若干个小区域.小区域足够小,以至于物体在每个区域中的运动近似是匀速运动.根据机械能守恒定律,物体经过此区域时,其速度为

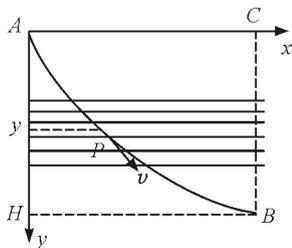


图2 “最速降线”简化模型

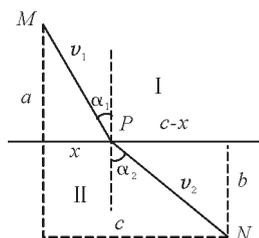


图3 “最速降线”物体运动过程中的速度区域划分

$$v = \sqrt{2gy} \quad (2)$$

经不同区域的速度不同,从A到B运动的过程中速度是越来越大的.物体途经两个区域时速度不同,如图3所示.物体在区域I中的运动的速度为 v_1 ,在区域II中的运动的速度为 v_2 .

由几何关系可得

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

即
$$\frac{\sin \alpha}{v} = C_1 \quad (3)$$

该结论与光的折射对应的斯涅耳定律是一致的.光入射到不同介质的界面上发生折射时,入射光和折射光位于同一个平面上,并且光在介质中传播的速度 v 与界面法线的夹角 α 满足如下关系

$$\frac{\sin \alpha}{v} = C_1$$

根据上述的相关特点便可以求“最速降线”方程了.如图4所示,设物体从A到B运动过程中任一位置纵坐标 y 对应的速度为 v , v 与 y 轴方向的夹角为 α ,与 x 轴方向的夹角为 φ ,则 $y' = \tan \varphi$,因而

$$\sin \alpha = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4)$$

将式(2)~(4)联立可得

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \frac{1}{\sqrt{2gy} \sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

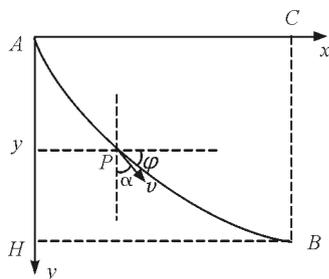


图4 物体运动过程中任一位置的速度分析

故 $y(1 + y'^2) = C$,这就是旋轮线的微分方程.

将该微分方程转换为参数方程,上式可变为

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy$$

令 $y = c \sin^2 \varphi$,则

$$dx = c(1 - \cos 2\varphi) d\varphi$$

$$x = \frac{c}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + c_0$$

由A点条件确定 $c_0 = 0$,再令 $\theta = 2\varphi, a = \frac{c}{2}$,则可以转换为

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

同样得到了“最速降线”的方程.

通过更加简化的推理分析模式,中学生基本上能用目前所学知识分析并理解“最速降线”问题,这有利于提高学生的认知.

4 基于“T”的验证

“最速降线”模型分析后还得通过技术手段进行验证,该验证从两个方面进行,即计算软件的验证和实验仪器的验证.

4.1 基于“T”的计算验证

沿着各曲线下滑的时间求解较为复杂,可以借助于一些专业的工具软件进行计算,本次计算采用的是 Mathematica 软件进行求解,在计算时间的程序编写中,引用文献程序,对方程进行求解^[2].程序如下:

(1) 由摆线可得沿摆线 C_1 下滑的时间

如图1,从A(0,0)点运动到B(x₁,y₁),以下运动的A,B点相同,其中重力加速度取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx =$$

$$\int_0^\beta \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2}}{\sqrt{2ga(1 - \cos \theta)}} a(1 - \cos \theta) d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \beta$$

(β 即为摆线中转过圆心角)

编辑 Mathematica 程序如下:

```
g = 9.8; x1 = Input[]; y1 = Input[];
```

```
Print["x1 =" x1, ", ", "y1 =", y1]
```

```
t = FindRoot[( $\theta - \sin[\theta]$ )/(1 - cos[ $\theta$ ]) =
```

```
x1/y1, { $\theta$ , Pi}];
```

```
 $\beta = \theta / t$ ;
```

```
a = x1 / ( $\beta - \sin[\theta]$ ) / t;
```

```
T1 = Sqrt[a/g] *  $\beta$ ;
```

```
Print[" $\beta$  =",  $\beta$ ]
```

```
Print["a =", a]
```

```
Print["T1 =", T1]
```

运行该程序,先后输入 $x_1=9, y_1=4$, 程序运行

结果为:

```
 $\beta = 3.67631689, a = 2.15006463, T1 =$ 
```

```
1.72197031
```

(2) 质点沿直线 C_2 下滑的时间

直线方程 $C_2: y = \frac{b}{a}x, y(0) = 0, y(x_1) = y_1$

$$则 T_2 = \int_{x_1_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{\sqrt{2(x_1^2 + y_1^2)}}{\sqrt{gy_1}}$$

在上面的程序后面添加两条命令:

```
T2 = Sqrt[2 * (x1^2 + y1^2) / g / y1];
```

```
Print["T2 =", T2]
```

运行该程序,先后输入 $x_1=9, y_1=4$, 程序运行

结果为: $T_2 = 2.22463$

(3) 质点沿圆弧 C_3 下滑的时间

圆弧过 $A(0,0), B(x_1, y_1)$. 则圆的参数方程 C_3 (圆心应在 x 轴上):

$$x = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1} \cos \theta \cos \theta$$

$$y = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1} \cos \theta \sin \theta$$

其中 $\arctan \frac{y_1}{x_1} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

得

$$T_3 = \int_{x_1_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx =$$

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{2gy_1}} \int + \infty \frac{1}{\sqrt{u(1+u^2)}} du (\text{令 } u = \tan \theta)$$

在上面的程序后面添加两条命令:

```
T3 = Sqrt[(x1^2 + y1^2) / 2 / g / x1] * Integrate
```

```
[1 / Sqrt[u * (1 + u^2)], {u, y1/x1, +  $\infty$ }];
```

```
Print["T3 =", T3]
```

运行该程序,先后输入 $x_1=9, y_1=4$, 程序运行

结果为: $T_3 = 1.77911$

(4) 质点沿抛物线 C_4 下滑的时间

抛物线方程 $C_4: x = \frac{x_1}{y_1^2} y^2, y \in [0, y_1]$

$$T_4 = \int_{x_1_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx =$$

$$\frac{1}{y_1^2 \sqrt{2g}} \int_{y_1_0} \frac{\sqrt{4x_1^2 y^2 + y_1^4}}{\sqrt{y}} dy$$

令 $\sqrt{y} = v$, 则

$$T_4 = \frac{\sqrt{2}}{y_1^2 \sqrt{g}} \int \sqrt{y_1^0} \sqrt{4x_1^2 v^4 + y_1^4} dv$$

在上面的程序后面添加两条命令:

```
T4 = Sqrt[2/g] / y1^2 * Integrate[Sqrt[4 *
```

```
x1^2 * v^4 + y1^4], {v, 0, Sqrt[y1]}];
```

```
Print["T4 =", T4]
```

运行该程序,先后输入 $x_1=9, y_1=4$, 程序运行

结果为: $T_4 = 1.78157$.

综合以上数据得如表 1 所示.

表 1 曲线及对应时间

曲线符号	曲线名称	质点沿曲线下滑所用时间 / s
C_1	最速降线	$T_1 = 1.69857$
C_2	直线	$T_2 = 2.22463$
C_3	圆弧	$T_3 = 1.77911$
C_4	抛物线	$T_4 = 1.78157$

由表 1 可知, $T_1 < T_4 < T_3 < T_2$, 而带入更多 x_1 和 y_1 的值, 或有 $T_1 < T_3 < T_4 < T_2$, 但是在这 4 条曲线中, 质点沿摆线即“最速降线”下滑所用的时间最少, 而沿直线下滑所用时间最多. 因此, 当给出任意一条连接 AB 的曲线, 都应该能得出沿摆线下滑用时最少的结论.

4.2 基于“T”的实验验证

理论分析后, 还得通过实验进行验证. 为此, 准备了 2 个实验装置: 科技馆的实验装置与自制实验装置.

科技馆的实验装置采用的是东莞市科学技术博

物馆中的实验装置,其中有直线、最速降线、圆弧3条轨道和3个实验小球,如图5所示.实验时同时释放3个小球,通过录像记录慢速微调回放得到到达末端点所用时间,记录在表2中.

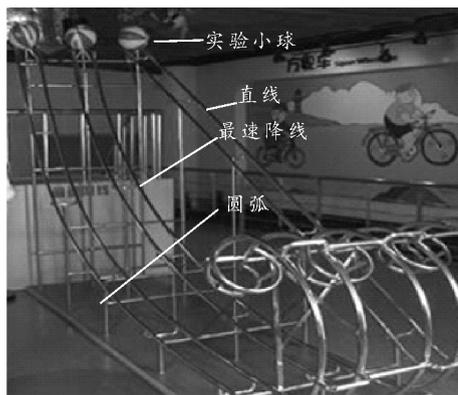


图5 科技馆的实验装置

表2 小球沿轨道运动的时间

时间 \ 轨道	圆弧	最速降线	直线
释放时刻 /s	75.873	75.873	75.873
到达时刻 /s	67.423	77.373	77.612
用时 /s	1.550	1.500	1.739

由表2可知,小球3条轨道用时最少的是“最速降线”,其次是圆弧,用时最长的是直线;尽管“最速降线”用时最短,但非常接近圆弧用时.

在如图6所示的自制仪器实验现象中,依然可以观察到沿“最速降线”运动时间最短的情况(图6为手机慢拍模式截屏的情景).

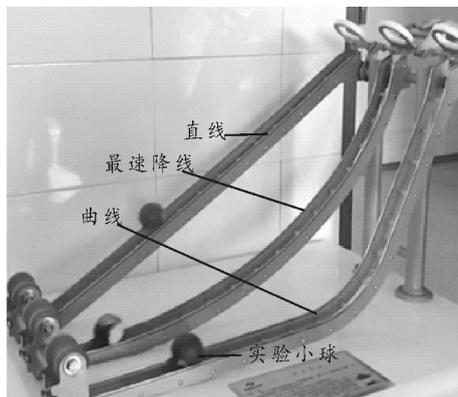


图6 自制实验仪器

基于技术的计算软件和实验仪器两个方面的实际验证,可以发现质点沿着“最速降线”运动所用时间最短,这不仅直观,也更有说服力.

5 基于“E”的推广与拓展

生活中还有许多现象与“最速降线”有关,尽管有些不是直观的“最速降线”,但原理实际上是类似的.

5.1 “最速降线”应用在我国古代建筑中的大屋顶

“最速降线”在建筑中也有着美妙的应用.我国古建筑中的“大屋顶”,从侧面看上去,“等腰三角形”的两腰不是线段,而是两段“最速降线”.按照这样的原理设计,在夏日暴雨时,可以使落在屋顶上的雨水,以最快的速度流走,从而对房屋起到保护的作用,如图7所示.还有一些逃生系统都有类似的设计.



图7 我国古代建筑中的大屋顶

5.2 “最速降线”还可以应用于影视厅或报告厅

在影视厅或报告厅,经常会为前边观众遮挡住自己的视线而苦恼.显然,场内的观众都在朝台上看,如果场内地面不做成前低后高的坡度模式,那么前边观众必然会遮挡后面观众的视线,这也可以根据采用“最速降线”的情景模式进行分析与演算,从而满足各方面的需要而设计出最佳的座椅安排如图8所示^[3].

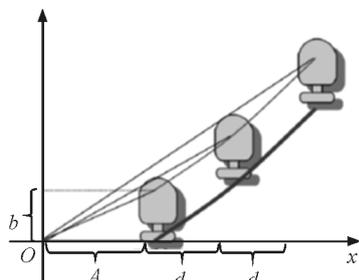


图8 “最速降线”应用于座椅安排演示图

5.3 “最速降线”规尺上的应用

杨秉烈先生发明了一种玩具叫做繁花曲线规,它由一套彩色塑料齿轮组成.一个大齿轮是环状的,牙齿做在里面;几个小齿轮的牙齿做在外面,小齿轮内部有一些小圆孔和几个其他形状的、较大的孔.使

紧扣物理规律 着重思维训练 培养物理建模能力

——以碰撞模型为例

李 惠

(株洲市第二中学 湖南 株洲 412000)

(收稿日期:2019-12-25)

摘要:以一道有关碰撞的自主招生试题为例,浅谈在中学生物理竞赛中如何紧扣物理规律,层层递进地进行思维训练,培养学生的物理建模能力.

关键词:碰撞 竞赛培训 物理建模

【例题】水平光滑大桌面上有一质量为 M 的均匀圆环形细管道,管道内有两个质量同为 m 的小球 A 和 B 位于管道同一直径的两端. $t=0$ 时刻管道静止,小球 A 和 B 沿着切线方向有相同的初速度 v_0 ,如图 1 所示. 不计一切摩擦.

(1) 两个小球在管道内第一次相碰前瞬间的相对速度大小.

(2) 设两个小球的碰撞是弹性的,分析两小球

碰后能否在管道内返回初始时刻相对管道的位置?

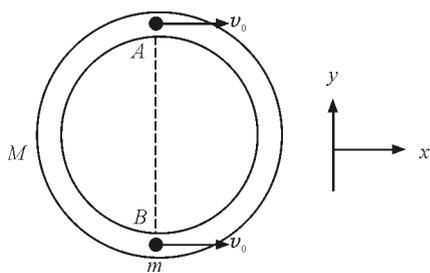


图 1 例题题图

用时左手按住大齿轮,在大齿轮里放一只小齿轮,把笔尖插进小齿轮的某一个孔里,让小齿轮紧贴大齿轮内壁滚动,这时笔尖就会在纸上画出许多美丽的曲线花纹.若将大齿轮换成带齿的直尺,画出来的曲线就是“最速降线”,如图 9 所示.

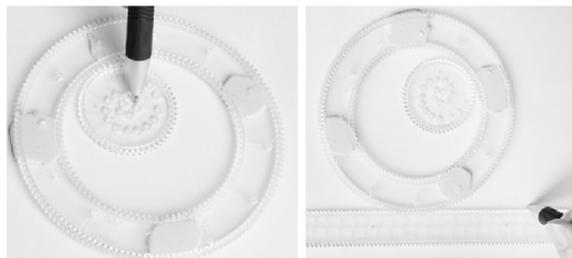


图 9 繁花曲线规

5.4 “最速降线”在医学上的应用

药物进入体内的方式有 3 种常见形式,即快速静脉注射、口服或肌注,医学上常用“房室系统”的观点来研究药物在体内的吸收、分布和排除过程,若能结合“最速降线”研究 3 种情况下体内血药浓度的变化曲线,将有助于得到血药浓度的变化,从而根据不同的疾病利用“药物动力学”找出最佳治疗方案^[4].

6 结束语

由于“最速降线”问题对大部分中学生而言过于困难,本文在“STEM”理念的基础上,从“S”与“M”的角度分析并简化了“最速降线”分析,从“T”的角度进行了计算验证与实验验证,最后从“E”的角度推广与拓展该模型,从中我们可以领略到该理念分析解决问题的强大能力——不仅可以更加系统、简便的研究、验证“最速降线”,甚至可以更高效地在生活中应用“最速降线”.

参考文献

- 1 钱伟长. 广义变分原理[M]. 上海:知识出版社,1995. 27 ~ 28
- 2 刘志勇,边军辉,刘培国. Mathematica 在最速降线问题中的应用[J]. 西安文理学院学报(自然科学版),2013, 16(1):91 ~ 94
- 3 徐绍辉. 基于 CAAD 的剧场观众厅若干问题设计研究[D]. 北京:清华大学,2011
- 4 张继稳,钟大放,毕殿洲. 单室模型药物血管外给药零级、一级释放药物动力学[J]. 中国药理学通报, 2005(02):245 ~ 248