从一道网红题谈对资优生物理思维的培养

魏明逊
（昆明第三中学　云南 昆明　650500）
（收稿日期：2020－02－16）

摘　要：物理之所以给优秀学生持续不断的动力，关键一点还是有趣，我们讨论一道题实际上不是题目本身，而是要告诉学生如何欣赏物理，并从中得到快乐.

关键词：物理思维　碰撞　培养

1　问题概述

在 2019 年 1 月 13 日，YouTube 上的著名频道 3Blue1Brown 发布了一个非常有趣的视频（https://www.bilibili.com/video/av41712219/?spm_id_from=trigger_reload）. 3Blue1Brown 的创始人是毕业于斯坦福大学的 Grant Sanderson，他用“可以看见”的动画方式，通俗易懂、深入浅出地解释了数学原理. 这是一种“让你懂”的解释，而不是一种“仅他懂”的证明. 网站的 Logo，如图 1 所示，来自 Grant Sanderson 右眼的颜色组成：$\frac{3}{4}$ 是蓝色，$\frac{1}{4}$ 是棕色，而这也正是 3Blue1Brown 这个名字的来历. 大部分的动画，都是 Grant Sanderson 自己通过编程实现的.

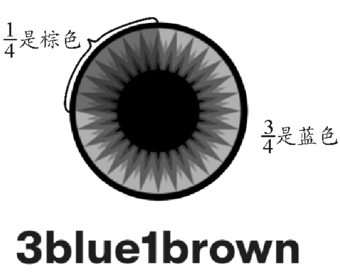

图 1　3Blue1Brown 网站的 Logo

这个问题的描述如下：如图 2 所示，在完全光滑的无限长平面上，有一个质量为 M 的滑块 A 以垂直于墙面的速度 v_0 向墙运动，A 和墙之间的连线上停着另一个质量为 m 的滑块 B. 假设系统所有碰撞均为完全弹性碰撞，且滑块可以看成质点. 求解 M 和 m 的质量是什么样的关系才能使 m 碰撞的次数与 π 有一定的关系.

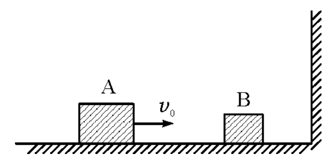

图 2　碰撞模型

从离散的物理碰撞能够推导出一个无限不循环的数学常量，数学和物理有时会显现出令人惊讶的默契，这就是 3Blue1Brown 所说的 Unexpected，冥冥之中蕴含着宇宙的某种设计. Gregory Galperin 于 1990 年最早发现了这个结果，并于 2003 在论文 Playing pool with π（the number π from a billiard point of view）中公布这个问题，这是一个网红问题. 但网上的各种解答数学味比较重，并且所有解答都是为了讨论与 π 的关系，对一般情景没有讨论，我们希望经过深入地分析让这道从物理中来的数学题重新回归物理的情景.

2　解决问题

设 M 以速度 v_0 向右与 m 发生第一次碰撞后

$$\frac{1}{2}Mv_M^2+\frac{1}{2}mv_m^2=E=\frac{1}{2}Mv_0^2 \tag{1}$$

$$Mv_M+mv_m=P=Mv_0 \tag{2}$$

对式(1)(2)进行变形得

$$\frac{1}{2}(\sqrt{M}v_M)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{m}v_m)^2=E$$

$$\sqrt{M}\sqrt{M}v_M+\sqrt{m}\sqrt{m}v_m=P$$

令 $x=\sqrt{M}v_M, y=\sqrt{m}v_m$

$$x^2+y^2=2E \tag{3}$$

$$\sqrt{M}x+\sqrt{m}y=P \tag{4}$$

式(4) 的斜率 $k=-\sqrt{\frac{M}{m}}$.

x 的值与 v_M 相关联,y 的值与 v_m 相关联,圆上的点就能确定两个物体在某个时刻的状态. 先确定初状态,m 静止,$y=0$,M 具有向右的最大初速度,取向右为正. 如图 3 所示,初始点在圆周上的 O_1 点,碰撞之后由于能量守恒,点必须在圆周上,同时要满足动量守恒,碰撞后的点和初始点的连线斜率必须是 $k=-\sqrt{\frac{M}{m}}$. 第一次碰撞后的点是 A_1,碰完以后 m 原速度大小返回,M 不变,因此 x 坐标不变,但 m 速度相反,所以 y 坐标反向,点 B_1 就是 m 与墙碰撞后 M,m 的状态,以此类推碰撞依次发生. A_1,A_2,A_3,… 代表 M 和 m 的碰撞,B_1,B_2,B_3,… 代表 m 与墙碰撞反弹,每一个点的 x,y 坐标代表 M,m 的运动状态.

当碰撞(可能是 M 与 m 间,也可能是 m 与墙之间)后满足:$v_M\leqslant 0$,$v_m\leqslant 0$,且 $|v_M|\geqslant|v_m|$ 时,碰撞将不再发生. 即满足:$x\leqslant 0$,$y\leqslant 0$,$y>\sqrt{\frac{m}{M}}x$. 即有点落入如图 3 所示斜线区间时,碰撞过程就结束. 临界值 $y=\sqrt{\frac{m}{M}}x$ 也就是圆周上的分界线. $y=\sqrt{\frac{m}{M}}x$ 的斜率 $k'=-\frac{1}{k}$,因此这条分界线应该和动量确定的线垂直,并且过圆心.

分界线与 x 轴的夹角为 θ,从初始点到点 A_1,对应的圆周角为 θ,如图 3 所示可以看出相邻点之间的弧长相同,对应的圆周角为 θ,圆心角是 2θ,而全部圆心角加起来小于 2π,因此碰撞次数 N 和 θ 的关系为

$$N2\theta\leqslant 2\pi \tag{5}$$

情况 1:当 $\frac{\pi}{\arctan\sqrt{\frac{M}{m}}}$ 不能整除时

$$N=\frac{\pi}{\arctan\sqrt{\frac{M}{m}}}$$

即 N 取整.

情况 2:当 $\frac{\pi}{\arctan\sqrt{\frac{M}{m}}}$ 能被整除时

$$N=\frac{\pi}{\arctan\sqrt{\frac{M}{m}}}-1$$

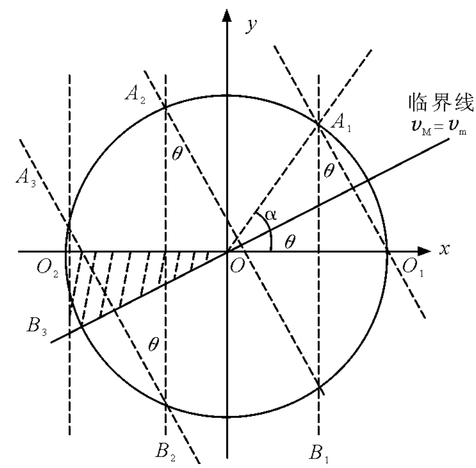

图 3　碰撞点区域分析

回到初始的问题:m 碰撞次数和 π 的关系属于第一种情况,当 $\frac{M}{m}=1$ 时,N 取最大整数值 3,$\frac{M}{m}=100$ 时,N 取最大整数值 31,以此类推,当 $M=100^n m$ 时,碰撞次数的公式即可简化为

$$N=\left[\frac{\pi}{\arctan\left(10^{-n}\right)}\right]$$

至此,N 和 π 的关系就清晰了,最终提取的其实就是 $\pi\,10^n$ 的整数部分,这就是碰撞问题中隐藏的 π 与碰撞次数的关系. 所有的网络解答都注重讨论 $M=100^n m$ 时呈现的关系,而对于高中物理我们需要引导学生研究 M 和 m 任意比值下碰撞后速度的变化及碰撞的次数,还需要讨论图 3 所呈现的物理含义,探寻规律引导资优生寻找物理的乐趣.

3　深入探讨

3.1　求解任意一次碰撞后 M 和 m 的速度大小

这个问题的实质就是求 A_1,A_2,… 的坐标(x_1,y_1),(x_2,y_2),…

首先求解 A_1 的坐标,从 $x^2+y^2=2E$ 入手,如图 3 所示.

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{\sqrt{2E}}\Rightarrow x_1=\sqrt{2E}\cos\alpha\Rightarrow$$

$$x_1=\sqrt{M}v_{M1}=\sqrt{2E}\cos\alpha$$

得

$$v_{M1}=v_0\cos\alpha \tag{6}$$

$$\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{2E}}\Rightarrow y=\sqrt{2E}\sin\alpha\Rightarrow$$

$$y=\sqrt{m}v_{m1}=\sqrt{2E}\sin\alpha$$

得

$$v_{m1}=\sqrt{\frac{M}{m}}v_0\sin\alpha \tag{7}$$

根据

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{m}{M}},\alpha=2\theta,\tan\theta=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{M-m}{M+m}\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2}$$

以此类推 A_2 点的角度为 2α…… 所以 n(n 为 M 和 m 碰撞次数）次 M 和 m 碰撞后的速度为

$$v_{Mn}=v_0\cos n\alpha=v_0\cos\left[n\cos^{-1}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)\right] \tag{8}$$

$$v_{mn}=\sqrt{\frac{M}{m}}v_0\sin n\alpha=$$

$$\sqrt{\frac{M}{m}}v_0\sin\left\{n\sin^{-1}\left[\sqrt{1-\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2}\right]\right\} \tag{9}$$

验证：

假设 $M=2m$，取 M 的初速度 v_0 为正方向

从第一次 M 和 m 碰撞后

M 的速度

$$v_{M1}=v_0\cos\alpha=v_0\frac{M-m}{M+m}=\frac{v_0}{3}$$

m 的速度为

$$v_{m1}=\sqrt{\frac{M}{m}}v_0\sin\alpha=\sqrt{\frac{M}{m}}v_0\sqrt{1-\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2}=\frac{4v_0}{3}$$

第二次 M 和 m 碰撞后

M 的速度为

$$v_{M2}=v_0\cos\left[2\cos^{-1}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)\right]=-\frac{7v_0}{9}$$

m 速度为

$$v_{m2}=\sqrt{\frac{M}{m}}v_0\sin\left\{2\sin^{-1}\left[\sqrt{1-\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2}\right]\right\}=\frac{8v_0}{9}$$

同理得到 M 和 m 第三次碰撞后，M 速度为

$$v_{M3}=-\frac{23v_0}{27}$$

m 速度为

$$v_{m3}=-\frac{20v_0}{27}$$

M,m 都向右运动，并且 $v_{m3}<v_{M3}$ 不会发生碰撞.

3.2　由任意时刻 M 速度表达式得到碰撞次数 N 的其他表达式

作 M 的速度

$$v_{Mn}=v_0\cos n\alpha=v_0\cos\left[n\cos^{-1}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)\right]$$

的 $v-t$ 图像，如图 4 所示. 把 M 的速度变化想象成简谐运动，每一次 M 与 m 的碰撞在图 3 上旋转 α 角，相当于每一次碰撞时间间隔都是 $\Delta t=\dfrac{\arccos\dfrac{M-m}{M+m}}{\omega}$，而每个 Δt 包含 m 与墙的一次碰撞，所以图 4 上的每个点对于 m 是两次碰撞，因此

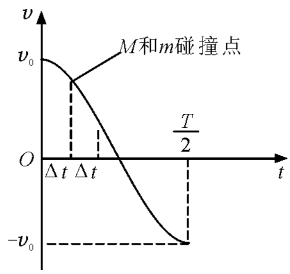

图 4　$v-t$ 图像

$$N=2\times\frac{\frac{T}{2}}{\Delta t}=2\times\frac{\frac{2\pi}{2\omega}}{\frac{\arccos\frac{M-m}{M+m}}{\omega}}=$$

$$\frac{2\pi}{\arccos\dfrac{M-m}{M+m}} \tag{10}$$

N 取整. 特别注意：如果 N 正好出来是整数，那么碰撞次数就是 $N-1$.

从数学上很容易得到

$$N=\frac{\pi}{\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}}=\frac{2\pi}{\arccos\dfrac{M-m}{M+m}} \tag{11}$$

真有点九九归一的感觉. 从不同的表达式也可以看出其中的物理含义：匀速圆周运动和简谐运动本来就是图 3 和图 4 的两种不同呈现方式. 式(11)实际上是把两种运动关联起来了.

3.3　最后的碰撞点落在 x 轴和分界线上的物理情景

前面的讨论最后的碰撞点落在图 3 的斜线区域，那么对于落在 x 轴和分界线上的碰撞点是否具有物理意义呢？我们分别从两个方面进行讨论.

(1) 如图 5 所示，A_4 的对称点 B_4 正好落在分界线上，也就是 M 和 m 最后一次碰撞完以后速度大小相等，方向相反，但 m 与墙碰撞以后，M 和 m 以相同的速度远离墙.

当 $\dfrac{\pi}{\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}}$ 能被整除时，且除数是大于 3 的

奇数，满足最后的 B 点落在分界线上，这时 M 和 m 的速度大小就相等.

例如：$\dfrac{\pi}{\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}}=5$，$\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}=\dfrac{\pi}{5}\Rightarrow\dfrac{M}{m}=\dfrac{2\sqrt{5}+5}{5}$，碰撞后 M 和 m 速度大小相同.

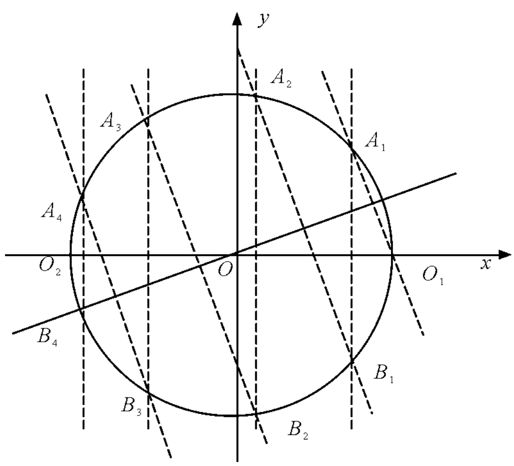

图 5　碰撞点在分界线

(2) 当 $\dfrac{\pi}{\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}}$ 能被整除时，且除数是大于等于 4 的偶数，满足最后的碰撞点在 O_2 点上. 这时 m 速度为零，M 速度大小为 v_0.

例如：$\dfrac{\pi}{\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}}=4$，$\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{M}{m}=1$，碰撞完后 m 速度为零，M 速度大小为 v_0. $\dfrac{\pi}{\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}}=6$，$\arctan\sqrt{\dfrac{M}{m}}=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow\dfrac{M}{m}=3$，碰撞完后 m 速度为零，M 速度大小为 v_0.

以上两个结论是不是很有意思啊！

4　启示

这道题本来只是一道数学的趣题，想反映出大自然中存在的神奇. 如果仅仅根据机械能守恒和动量守恒只是揭示了碰撞和 π 之间隐藏的关系. 但对于资优生而言消化网络上对网红题的解法仅仅是欣赏物理的开始，应该引导学生对圆进行讨论，特别是根据圆上的点可以引导学生求解任意时刻碰撞的速度，并通过速度的表达式，进一步发现 M 速度大小不光是 $M=m$ 时可以回到原来的初速度大小，而且 M 和 m 只要比例适当就可以使 M 的速度变为 v_0 或者 M，m 速度大小相同，这是大自然神奇的一面. 进一步研究发现 M 的速度大小变化是一条余弦曲线，从而找到 M 和 n 碰撞的其他表达式，最后发现这两个表达式在数学上是等价的，最终完成匀速圆周运动和简谐运动的统一，物理真奇妙！

物理之所以能给优秀学生持续不断的动力，关键一点还是有趣，我们讨论一道题实际上不是题目本身，而是要告诉学生，外面的世界很精彩，如何欣赏物理，并从中得到快乐. 这些优秀学生不一定将来都从事物理学研究，但他们能长期保持爱好，并在将来提出一些有意思的问题，推动社会的进步不就是我们教物理最大的快乐吗.

参考文献

1　https://www.bilibili.com/video/av78295490/

2　https://www.bilibili.com/video/av41712219/?spm_id_from = trigger_reload

Cultivation on Physical Thinking of Gifted Students From a Net Red Question

Wei Mingxun

(Kunming No. 3 Secondary School, Kunming, Yunnan　650500)

Abstract: The key to the constant motivation of physics for elite students is that it is interesting. When analyzing a physics problem, we do not merely center on the problem itself, but try to tell students how to appreciate the beauty of physics and get happiness from it.

Key words: physical thinking; collisions; culture