

摆球运动中极值问题的解析

耿腊香

(前黄高级中学国际分校 江苏 常州 213161)

(收稿日期:2015-02-01)

摘要:近几年来,江苏物理高考卷中频频出现摆球运动的极值问题,值得我们师生引起重视.作者将此类问题加以总结归纳,集中探究了摆球在自由运动、匀速率运动、受水平恒力作用这3种情况下速度与重力功率的极值问题,并介绍了极限法、数学求导法、仿真物理实验这3种求极值问题的方法.

关键词:摆球 极值问题 类单摆 仿真物理实验室

1 单摆中的极值问题

【例1】如图1所示,一根不可伸长的轻绳长为 L ,一端固定于 O 点,另一端连接质量为 m 的小球,使小球从水平位置 A 点静止释放.小球从 A 点摆动到最低点 B 点的过程中,重力对小球做功的功率如何变化?

解法1:极限法

此题为2008年高考江苏卷第8题的原型,可采用极限法解答.因为最高点(A 点)小球速度为零,所以 A 点小球重力功率为零;最低点(B 点)速度与重力垂直,所以 B 点重力功率也为零.因此小球从最高点摆动到最低点的过程中,重力对小球做功的功率先增大后减小.但对于这种定性分析的结果还远远

些基本积分形式,可以在高中所学微积分范围内被学生所接受和理解,它们为高中微积分在物理中的实际应用提供了有意义的教学实例.

参考文献

- (美)E·M·哈塞尔.伯克利物理学教程(第2卷).南开大学物理系译.北京:科学出版社,1979.59
- 蒋卫健,胡昉,方本民.均匀带电非导体圆盘边缘的电势

的几种解法.大学物理,2013,32(8):24~28

- 斯迈思 W R. 静电学与电动力学.戴世强译.北京:科学出版社,1981.35~36,177
- 熊建平.导体薄圆盘的电荷分布.大学物理,1999,18(5):8~10
- 陈钢,刘晓,李成金.导体圆盘电容的计算.物理通报,2015(7):21~23

Calculation on the Electric Potential Relating to the Uniformly Charged Ring

Chen Gang Liu Xiao

(School of Physics and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006)

Abstract: High school physics has introduced derivative and integral, which is the most important mathematical tool for physics theory study and actual calculation. This paper presents some examples of potential calculation related to uniformly charged ring, and the basic calculus involved in can be understood and accepted by high school students. Therefore, it provides a meaningful example for calculus is used in high school physics.

Key words: derivative and integral; uniformly charged ring; potential

不够,小球下摆到何处时重力功率取得最大值呢?

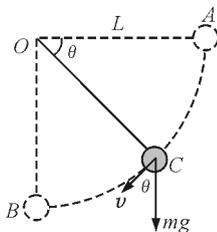


图1

解法2:数学求导法求极值

由动能定理

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgl \sin \theta$$

得 $v = \sqrt{2gl \sin \theta}$

由功率定义得

$$P = mgv \cos \theta = mg \sqrt{2gl \sin \theta} \cos \theta$$

令

$$f(\theta) = \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$f'(\theta) = \cos^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

令 $f'(\theta) = \cos^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta = 0$, 得

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以,当 $\theta = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35.26^\circ$ 时,重力功率取得最大值 P_{\max} .

2 匀速率运动的摆球的极值问题

【例2】如图2所示,细线的一端固定于O点,另一端系一质量为m的小球.在水平拉力F的作用下,小球以恒定速率在竖直平面内由A点运动到B点.在此过程中拉力的瞬时功率如何变化?

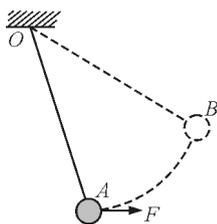


图2

(1) 极限法

此题为2013年高考江苏卷第3题,许多学生习惯性地采用上题中的极限法来解题.如图3所示,因为小球在最低点(C点)静止,速度为零,所以C点拉

力功率为零;小球运动到与O点等高(D点)时,速度与拉力垂直,所以D点拉力功率也为零.因此小球在拉力作用下向上运动的过程中,重力对小球做功的功率先增大后减小.

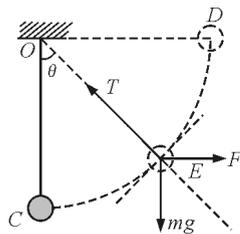


图3

然而本题与单摆模型不同,小球不可能达到D点.因为小球做匀速圆周运动的向心力由 $T - mg \cos \theta - F \sin \theta$ 提供

$$T - mg \cos \theta - F \sin \theta = m \frac{v^2}{l} \quad (1)$$

做匀速圆周运动的切向力 $F \cos \theta - mg \sin \theta = 0$, 即

$$F = mg \tan \theta \quad (2)$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时, F 趋于无穷大,再由式(1)得 T 趋于无穷大,超出了绳子所能承受的范围,因此小球运动到D点之前绳子早已断了,不能用极限法来解答.

(2) 小球至多能运动到何处?

设绳所能承受的最大拉力为 T_m , 则

$$T_m - mg \cos \theta_m - F \sin \theta_m = m \frac{v^2}{L} \quad (3)$$

由式(3)解得 θ_m 即为最大角度值 ($0 < \theta_m < 90^\circ$).

(3) 拉力功率何处取得最大值?

方法1:由定义法得

$$P_F = Fv \cos \theta \quad (4)$$

将式(2)代入式(4)得

$$P = mg \tan \theta \cdot v \cdot \cos \theta = mgv \sin \theta$$

随着 θ 增大, P_F 也逐渐增大. 当 $\theta = \theta_m$ 时, P_F 取得最大值.

方法2:由动能定理可得 $W_F + W_G = 0$, 则 $P_F = -P_G = mgv \sin \theta$, 与定义法同解.

3 “类单摆”运动中的极值问题

【例3】如图4所示,细线的一端固定于O点,另一端系一质量为m的小球.在水平恒力F作用下,小球在竖直平面内由A点静止运动到最高点B点.在

此过程中重力的瞬时功率如何变化?

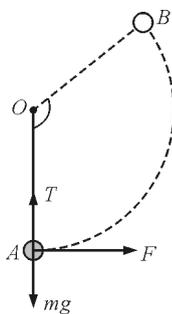


图4

(1) 小球怎样运动? 在何处速度达到最大值?

由题意分析可得,开始时(A点)小球静止,运动到最高点(B点)小球速度为零,因此小球速度先增大后减小到零.但在何处取得最大值呢? 是否在中间位置? 小球的运动是否具有对称性? 这些问题都值得我们去探究.此题中的 F 与 mg 虽为恒力,但绳中的张力不断变化,从力学的角度来分析小球的运动情况比较复杂.此处笔者运用仿真物理实验室模拟小球的运动,直观感知小球的运动情况,由图像特点从而分析出小球在何处速度达到最大值.

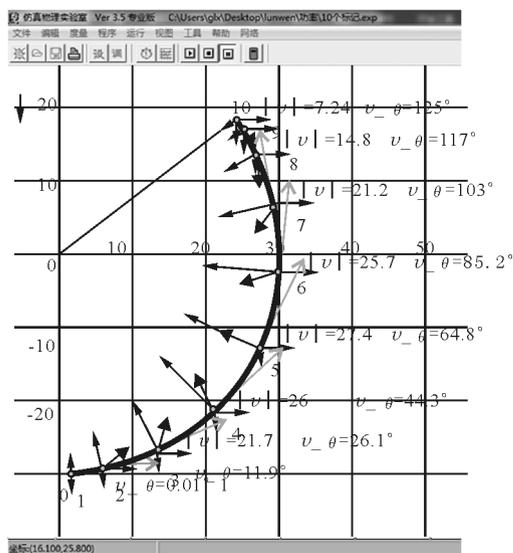


图5

图5为频闪照相得到的实验图像,实验中设置频闪周期为 0.4 s ,重力为 5 N ,外加恒力为 10 N ,绳长为 30 m ,细箭头 \rightarrow 表示小球受力,粗箭头 \rightarrow 表示小球合力,灰箭头 \rightarrow 表示小球速度,数字表示经过频闪照相得到的小球的位置.

由图像5可得在位置5处小球受到的合外力与速度垂直,因此小球从位置1到位置5做加速运动,

位置5到位置10做减速运动,在位置5速度取得最大值.位置5是中间位置吗?

运用仿真物理实验室中的“实验数据曲线”作出 $v-t$ 图像和 $a-t$ 图像,如图6和7所示.

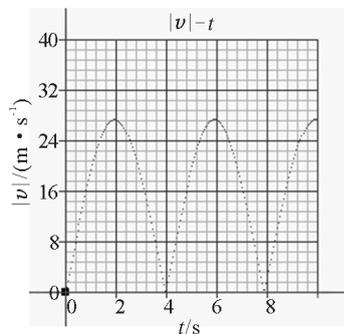


图6

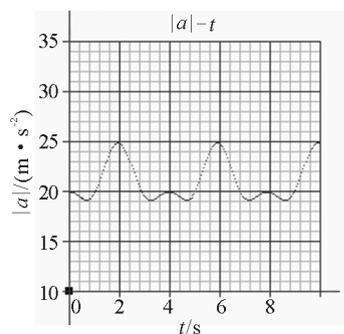


图7

由图像分析可得从位置0到位置10,小球先由静止做加速度减小后增加的加速运动,再做加速度减小后增加的减速运动至静止,在中间时刻取得最大值.且 $v-t$ 图像和 $a-t$ 图像 t 都是随时间周期性变化的.由 $v-t$ 图像中 $0\sim 2\text{ s}$ 和 $2\sim 4\text{ s}$ 中曲线与时间轴所围成的面积相等,可得位置5为中间位置.

由以上结论可得,中间时刻位置即为中间位置,都是位置5.因此在中间位置5处速度取得最大值.

(2) 小球运动的最大角度 θ_m 是多少?

1) 图像法

如图,在中间位置5处小球受到的合外力正好在拉力方向上即与速度垂直,此时 $\tan\theta = \frac{F}{mg}, \theta = \arctan \frac{F}{mg}$,所以 $\theta_m = 2\arctan \frac{F}{mg}$.

2) 数学求导法

由动能定理

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_F + W_G =$$

$$FL \sin \theta - mgL(1 - \cos \theta)$$

对动能求导

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = FL \cos \theta - mgL \sin \theta$$

令 $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = FL \cos \theta - mgL \sin \theta = 0$

得 $\tan \theta = \frac{F}{mg}$, 与图像法同解.

3) 结论分析

由 $\theta_m = 2\arctan \frac{F}{mg}$, 得 θ_m 由 F 与 mg 的比例关

系决定 ($0 < \theta_m < 180^\circ$):

当 $F = 0$ 时, $\theta_m = 0$; 当 $F = mg$ 时, $\theta_m = 90^\circ$.

当 $F = \sqrt{3}mg$ 时, $\theta_m = 120^\circ$; 当 $F \rightarrow \infty$ 时, $\theta_m \rightarrow 180^\circ$.

(3) 小球的运动为什么会具有如此完美的对称性?

由图像规律分析发现, 小球运动的时间和角度都是关于中间位置 5 对称的, 此模型的规律与单摆模型非常相似. 转换思维: 给小球施加恒力 F 的作用, 其实相当于在空间中存在另一个水平方向的“重力场”(对小球产生的重力为 F). 此模型中相当于两个重力场的叠加, 将图像倾斜放置, 如图 8 所示, 位置 5 为叠加场中的“最低点”, 位置 0, 10 为叠加场中

的“最高点”, 发现此模型竟与单摆模型出奇的相似, 因此笔者大胆称此模型为“类单摆”模型.

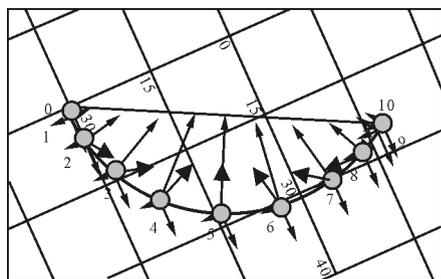


图 8

(4) 在何处重力功率达到最大值?

实验中设置频闪周期为 0.295 s , $F = \sqrt{3}mg$, 则 $\theta_m = 120^\circ$. 在 $\theta = 60^\circ$ 时小球速度取得最大值, 是否重力功率也在此取得最大值呢? 用仿真物理实验记录实验中的 15 组 (v, θ) 数据, 将测量数据代入公式计算出重力的功率, 如表 1 所示. 根据表中数据绘制出如图 9 所示的 $P-t$ 图像.

由图像分析可得, 重力的功率先增大后减小, 显然不是在 $\theta = 60^\circ$ 时取得最大值, 由图像数据分析得: 在 $\theta = 73.7^\circ$ 左右时, 重力功率取得最大值 $P_{\max} = 114.2168\text{ W}$ 左右. 需要解释的是, 仿真物理实验室只是起到模拟的效果, 其采集的数据还存在一定的误差.

表 1 摆球重力功率随摆角的变化

计数点	0	1	2	3	4	5	6	7
$v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	0	5.08	10	14.6	18.6	21.8	23.8	24.5
$\theta/(\text{^\circ})$	0	1.44	5.7	12.7	22	33.5	46.3	60
$\sin \theta$	0	0.025 16	0.099 32	0.219 85	0.374 61	0.551 94	0.722 97	0.866 03
$P = mgv \sin \theta / \text{W}$	0	0.638 30	4.965 99	16.048 80	34.838 40	60.161 10	86.033 10	106.088 00
计数点	8	9	10	11	12	13	14	
$v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	23.8	21.8	18.6	14.6	10	5.07	0.013	
$\theta/(\text{^\circ})$	73.7	86.6	98	107	114	119	120	
$\sin \theta$	0.959 810	0.998 24	0.990 27	0.956 30	0.9135 50	0.874 62	0.866 03	
$P = mgv \sin \theta / \text{W}$	114.217 000	108.808 00	92.094 90	69.810 20	45.677 30	22.171 60	0.0562 90	

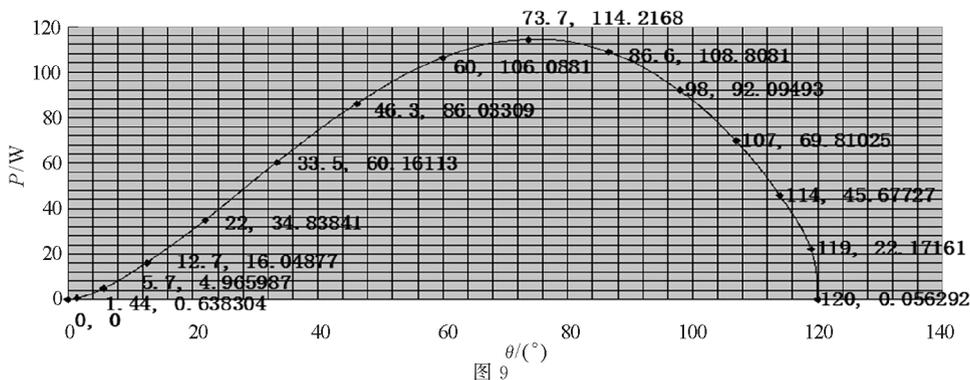


图 9