

“数形结合”在求电功率中的应用

柯 尧

(九江第一中学 江西 九江 332000)

(收稿日期:2015-03-13)

摘 要: $U-I$ 图像是恒定电流中的一个基本图像,它应用广泛.本文利用数形结合的原理探讨了其在求非线性元件功率中的应用,从而提高学生利用图像解决问题的能力.

关键词: $U-I$ 图像 数形结合 非线性元件 电功率

在恒定电流中,利用 $U-I$ 图像解决实际问题是一种常见的方法与手段,特别是利用交点坐标求电功率,更是能体现其独到之处.在实际解题中,大部分学生会采用此法,却不知道其原因,甚至教师在教学中,也有只能意会、无法言传的困惑.本文通过数学方法论证,解释交点的物理意义,并通过几例将其应用进一步深化.

1 问题引入

【例 1】(2013 高考天津卷第 9 题)实验得到小灯泡的伏安特性曲线如图 1 所示,如果将这个灯泡接到电动势为 1.5 V,内阻为 $5\ \Omega$ 的电源两端,小灯泡消耗的功率为多少?

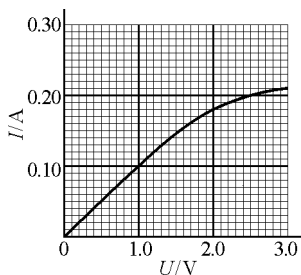


图 1

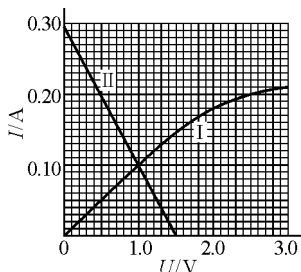


图 2

解析:这是一道非常典型的利用 $U-I$ 图像求功率的题目,大部分考生知道需要小灯泡的伏安特

性曲线图像上作出电源的外伏安特性曲线,再取其交点横纵坐标乘积即可得到小灯泡实际功率.但为什么交点坐标乘积表示小灯泡实际功率呢?要清楚交点的意义并不难,可以这么论证:

通过电源的电流

$$I_1 = f(U)$$

由闭合电路欧姆定律知

$$f(U) = \frac{E - U}{r}$$

小灯泡电流与电压的关系无具体的表达式,但可表示为

$$I_2 = g(U)$$

考虑到电源与灯泡串联,有

$$I_1 = I_2$$

在同一图像上画出 $f(U)$ 与 $g(U)$ 的图线,结合图像交点的数学意义可知图线 $I_1 = f(U)$ 与 $I_2 = g(U)$ 的交点表示小灯泡此时的实际电压和电流,交点的横纵坐标乘积为实际功率.由于电源电动势为 1.5 V,内阻为 $5\ \Omega$,有 $f(U) = 0.3 - 0.2U$,在图 1 上作出其图线,如图 2 所示的图线 II,交点坐标为 (1.0, 0.10),因此小灯泡功率为 $P = 0.1\ \text{W}$.

2 举一反三 拓展应用

变式 1:在问题 1 的基础上,将两个此小灯泡串联接到该电源上,如图 3,求每个小灯泡消耗的功率.

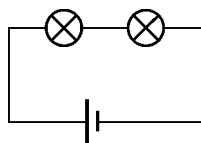


图 3

解析:对于这个问题直接作图找交点坐标无法求出小灯泡的功率,原因是此时小灯泡的实际电压不等于电源的路端电压.可以用两种方法来解此题.

方法一:将两个小灯泡等效为一个小灯泡,画出等效小灯泡的伏安特性曲线,设每个小灯泡的电压电流为 (U,I) ,相应的等效小灯泡电压电流为 (U',I') ,显然有 $U'=2U,I'=I$,在图 2 中作出等效小灯泡的伏安特性曲线,如图 4 所示的图线Ⅲ.图线Ⅲ与电源外伏安特性曲线Ⅱ交点坐标为 $(1.20,0.063)$,所以小灯泡的功率为

$$P=\frac{1}{2}UI=0.037\ 8\ \text{W}$$

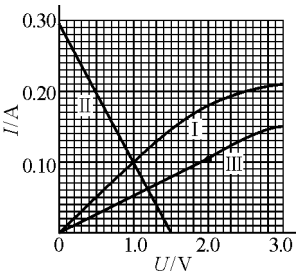


图 4

方法二:小灯泡电流与电压的关系可表示为

$$I_2=g(U)$$

电源电流与电压关系式为

$$I_1=f(U')=\frac{E-U'}{r}$$

又
$$U'=2U\quad I_1=I_2$$

因此,有
$$I_1=f(2U)=\frac{E-2U}{r}$$

在图 1 的基础上作出此图线,如图 5 所示的图线Ⅱ,由图线可看出,此图线为电动势为 $\frac{1}{2}E$,内阻为 $\frac{1}{2}r$ 的电源的外伏安特性曲线.与小灯泡伏安特性曲线Ⅰ交点 $(0.62,0.062)$ 为小灯泡的实际工作电压和电流,灯泡的功率为

$$P=UI=0.038\ 4\ \text{W}$$

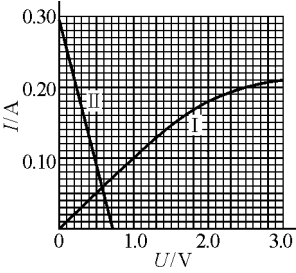


图 5

点评:方法一将两个灯泡等效为一个灯泡,转化为一个灯泡与电源串联的形式,图线交点坐标表示两个灯泡的总功率,灯泡相同,消耗的功率各一半,方法比较简单,但由于等效图线不为直线,描点后连线误差较大.方法二利用函数解析式的变换,从图像中得出单个灯泡的实际工作电压和电流,此法变换出的 $I_1=\frac{E-2U}{r}$ 的图线可认为是新电源的外伏安特性曲线,可称为“等效电源法”,此线为直线,误差较小.

变式 2:在问题 1 的基础上,将 2 个此小灯泡并联在该电源上,如图 6,求每个小灯泡消耗的功率.

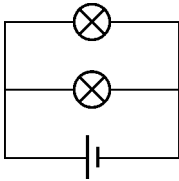


图 6

解析:同理此问题也有两种解法,即分别将灯泡与电源等效.

方法一:设每个小灯泡的电压电流为 (U,I) ,相应的等效小灯泡电压电流为 (U',I') ,则 $U'=U,I'=2I$.作出等效灯泡伏安特性曲线,如图 7 所示的图线Ⅲ,交点坐标 $(0.75,0.153)$ 表示等效灯泡的实际工作状态,每个灯泡的功率为

$$P=\frac{1}{2}UI=0.057\ 4\ \text{W}$$

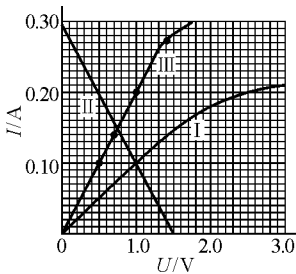


图 7

方法二:灯泡电流与电压的关系可表示为

$$I_2=g(U)$$

电源电流与电压关系式为

$$I_1=f(U')=\frac{E-U'}{r}$$

根据并联的特点知

$$I_2=\frac{1}{2}I_1\quad U=U'$$

即

$$I_2 = \frac{1}{2} f(U) = \frac{E - U}{2r}$$

在图1中作出 $I_2 = \frac{1}{2} f(U)$ 的图线,如图8所示

的图线II,交点坐标为(0.75, 0.077),小灯泡消耗的功率为 $P = UI = 0.0577 \text{ W}$.

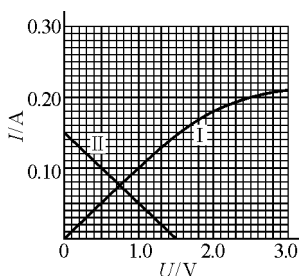


图8

点评:两个灯泡并联,电源电流为支路电流两倍,在理解变式1解法的基础上,此题的思路应该是顺理成章、水到渠成。

变式3:(第28届全国中学生物理竞赛预赛第10题)有两个电阻 R_1 和 R_2 ,它们的阻值随所加电压的变化而改变,从而它们的伏安特性即电压和电流不再成正比关系(这种电阻称为非线性电阻).假设电阻 R_1 和电阻 R_2 的伏安特性图线分别如图10所示.现先将这两个电阻并联,然后接在电动势 $E = 9.0 \text{ V}$,内阻 $r_0 = 2.0 \Omega$ 的电源上.试利用题给的数据和图线在题图中用作图法读得所需的数据,进而分别求出电阻 R_1 和电阻 R_2 上消耗的功率 P_1 和 P_2 .

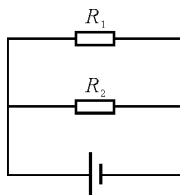


图9

解析:虽然这是一个竞赛题,但是如果考生知道利用图线交点求功率,那么此题难度并不大.前面两种解法对这个题是否都适用呢?显然这里无法画出等效电源的外伏安特性曲线,只能画等效电阻伏安特性曲线.设两电阻电压电流分别为 (U_1, I_1) 、 (U_2, I_2) ,等效电阻电压电流为 (U_3, I_3) ,由电路特点知: $U_3 = U_1 = U_2$, $I_3 = I_1 + I_2$,在图10中作出等效曲线,并作出电源的外伏安特性曲线,如图11所示,根据

交点坐标知此时电阻工作电压为: $U_1 = U_2 = 2.3 \text{ V}$,由图线可得电阻此时的实际电流,电阻 R_1 消耗的功率为 $P_1 = U_1 I_1 = 2.5 \text{ W}$,电阻 R_2 消耗的功率为 $P_2 = U_2 I_2 = 4.9 \text{ W}$.

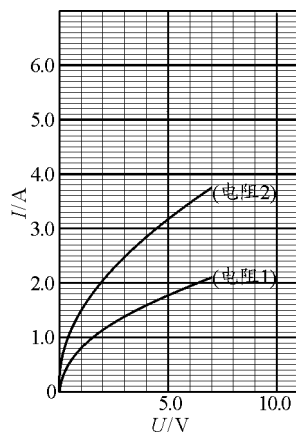


图10

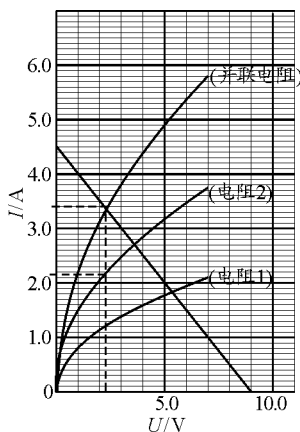


图11

点评:两电阻不同,无法利用函数解析式的变换画出等效电源的特性曲线,需利用等效电阻求出两电阻的工作电压,这充分体现了竞赛题目的灵活性和对逻辑思维的较高要求.如果将两电阻串联也不难求出其功率.

总之,利用物理规律建立函数关系式,画出图线,以形助数,借助形中的斜率、截距、交点体现其中的某物理量或某物理状态,这是解决物理问题的基本方法之一,也符合考纲中对运用几何图形、函数图像分析问题能力的要求.

参考文献

- 1 杭庆祥. $U-I$ 图像中交点意义的解释. 物理教师, 2012, (4): 19 ~ 22