

# 适应物理竞赛内容新调整 提升对多普勒效应的认识

吴庆华

(江苏省沭阳高级中学 江苏 宿迁 223600)

(收稿日期:2015-03-23)

**摘要:**2013年全国中学生物理竞赛委员会执行新的《全国中学生物理竞赛内容提要》,多普勒效应是复赛题和决赛题新增补的内容之一,本文利用初等数学分别对机械波和电磁波的多普勒效应公式进行推导,并应用声波和光波的多普勒效应规律求解全国中学生高中物理竞赛题.

**关键词:**多普勒效应 公式推导 竞赛考纲 调整 奥赛题解析

## 1 问题的提出

2011年全国中学生物理竞赛委员会对原有的《全国中学生物理竞赛内容提要》进行了调整和补充,复赛题和决赛题增补的内容多达42处,从2013年开始执行,多普勒效应就是新增补的内容之一,2014年全国物理奥赛复赛压轴题就考查了光的多普勒效应.光的多普勒效应定量计算属于边缘性知识,奥赛辅导教材基本没有涉及,大学普通物理也因为繁而没有对电磁波的多普勒效应公式进行推导,因此,有必要对多普勒效应作较为全面的认识.

## 2 多普勒效应

波源的频率等于单位时间内波源发出的完全波的个数,观测者接收到的频率等于观测者单位时间内接收到的完全波的个数.当波源和观测者之间有相对运动时,观测者接收到的频率与波源的振动频率不同,这种现象物理学上称为多普勒效应.多普勒效应是波动过程的共同特征,不仅机械波有多普勒效应,电磁波也有多普勒效应.

### 2.1 机械波的多普勒效应的公式推导

简单起见,我们只讨论波源S和观察者的运动方向与声音的传播方向共线的情况.设波源频率 $f_S$ ,观察者接收到的频率为 $f_R$ ,介质中的波速为 $V$ .若波源和观察者都不动时,单位时间内波源发出的

完全波个数等于观察者接收到的完全波个数,观察者接收到的频率

$$f_R = \frac{V}{\lambda} = f_S$$

(1) 波源静止,观察者运动

如图1所示,静止点波源发出的球面波波面是同心的,若观察者以大小为 $v$ 的速度靠近或离开声源,则机械波相对于观察者的传播速度变为

$$v' = V + v$$

或

$$v' = V - v$$

于是观察者接收到的频率为

$$f_R = \frac{v'}{\lambda} = \frac{V \pm v}{\lambda}$$

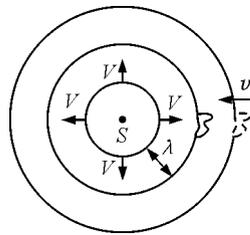


图1

(2) 声源运动,观察者静止

若声源以大小为 $u$ 的速度运动,它发出的球面波波面不再同心,如图2所示,两圆分别是时间相隔一个周期 $T$ 的两个波面,它们中心之间的距离为 $uT$ ,从而对于迎面而来或背离而去的观察者来说,

在一个周期时间内接收到的波长为

$$\lambda' = \lambda \mp uT = (v \mp u)T$$

观察者接收到的频率为

$$f_R = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{(v \mp u)T} = \frac{V}{v \mp u} f_S$$

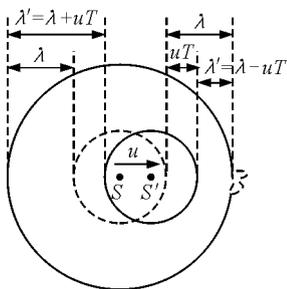


图2

### (3) 声源和观察者都运动

这时,有效波速和波长都发生了变化,观察者接收到的频率为

$$f_R = \frac{V \pm v}{(V \mp u)T} = \frac{V \pm v}{V \mp u} f_S$$

**说明:**机械波总在一一定的介质中传播,上面所说的静止和运动,都是相对于介质而言的,在这里波源速度  $u$  和观察者速度  $v$  在公式里的地位不对称:若波源和观察者相向运动或者波源和观察者均迎着波的传播方向运动时,上式中取“+ $v$ ”、“+ $u$ ”;若波源和观察者相背运动或者波源和观察者均沿波传播的方向运动时,上式中取“- $v$ ”、“- $u$ ”。

经典的多普勒效应物理中只有纵向效应,没有横向效应,如果运动速度不在波源与观测者的连线上,只要考虑在连线方向的速度分量即可。

## 2.2 电磁波的多普勒效应的公式推导

因为电磁波以光速传播,光速  $c$  与参照系无关,电磁波的传播不依赖弹性介质,所以波源与观测者之间的相对运动速度决定了接收到的频率。在涉及相对运动时必须考虑相对论时空关系。在相对论中,除纵向外,还有横向多普勒效应,考虑到物理竞赛要求,本文仅讨论波源与观测者在同一直线上运动的情况。

### (1) 若波源远离观测者运动

假设某一波源以速度  $v$  远离地球运动,波源和

地面的接收器的连线与波源的运动方向在同一直线上,在此过程中波源向地面接收器发出两个电磁脉冲,在波源参考系  $S'$  看来,其时间间隔为  $\Delta t'$ ,由于时间膨胀效应,在地球参考系  $S$  看来这两个电磁脉冲的时间间隔

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

考虑到波源在发射两个电磁脉冲时又退行了  $v\Delta t$ ,所以地球接收到的这两个脉冲的时间间隔

$$\Delta t_R = \Delta t + \frac{v\Delta t}{c} \quad (2)$$

由(1)、(2)两式得

$$\Delta t_R = \Delta t' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

因此,一个相对观察者退行速度为  $v$  的波源,若它所发出的电磁波的本征周期为  $T_S$ ,本征频率为  $\nu_S$ ,则观察者观测到的电磁波的周期

$$T_R = T_S \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

频率

$$\nu_R = \nu_S \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (3)$$

当波源远离观测者运动,  $\nu_R < \nu_S$ , 观察者接收到的电磁波的频率比波源发射的频率低,称为红移。

### (2) 若波源向观测者运动

将式(3)中的  $v$  用  $-v$  表示,得到

$$\nu_R = \nu_S \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (4)$$

当波源与观测者相互靠近时,  $\nu_R > \nu_S$ , 观察者接收到的频率比波源发射的频率高,称为紫移。

## 3 奥赛题解析

### 3.1 声波的多普勒效应

**【例1】**(第22届全国中学生物理竞赛复赛第6题) 两辆汽车A与B,在  $t=0$  时从十字路口O处分别以速度  $v_A$  和  $v_B$  沿水平的、相互正交的公路匀速前进,如图3所示。汽车A持续地以固定的频率  $\nu_0$  鸣笛,求在任意时刻  $t$  汽车B的司机所检测到的笛声

频率. 已知声速为  $u$ , 且有  $u > v_A, u > v_B$ .

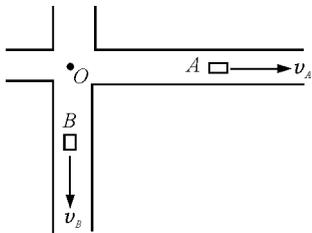


图3

**解析:** 如图4所示,  $t$ 时刻汽车B位于  $B(t)$ 处, 距O点的距离为  $v_B t$ . 此时传播到汽车B的笛声不是  $t$ 时刻而是较早时刻  $t_1$ 由A车发出的. 汽车A发出此笛声时位于  $A(t_1)$ 处, 距O点的距离为  $v_A t_1$ . 此笛声由发出点到接收点( $t$ 时刻B车所在点)所传播的路程为  $u(t - t_1)$ .

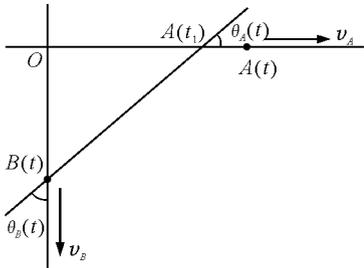


图4

由几何关系可知

$$(v_B t)^2 + (v_A t_1)^2 = [u(t - t_1)]^2$$

即

$$(u^2 - v_A^2)t_1^2 - 2u^2 t t_1 + (u^2 - v_B^2)t^2 = 0$$

其解为

$$t_1 = \left( \frac{u^2 \pm \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} \right) t$$

由于  $u^2 > u^2 - v_A^2, t_1 < t$ , 所以上式中只能取减号, 即

$$t_1 = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} t$$

$$t - t_1 = \frac{\sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2} - v_A^2}{u^2 - v_A^2} t$$

令

$$\sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2} = k$$

有

$$t_1 = \frac{u^2 - k}{u^2 - v_A^2} t$$

$$t - t_1 = \frac{k - v_A^2}{u^2 - v_A^2} t$$

在  $t_1$ 时刻, 位于  $A(t_1)$ 处的汽车A发出的笛声沿直线(即波线)  $\overline{A(t_1)B(t)}$ 在  $t$ 时刻传到  $B(t)$ 处, 以  $\theta_{A(t_1)}$ 和  $\theta_{B(t)}$ 分别表示车速与笛声传播方向的夹角, 有

$$\cos \theta_{A(t_1)} = \frac{v_A t_1}{u(t - t_1)} = \frac{v_A(u^2 - k)}{u(k - v_A^2)} \quad (1)$$

$$\cos \theta_{B(t)} = \frac{v_B t}{u(t - t_1)} = \frac{v_B(u^2 - v_A^2)}{u(k - v_A^2)} \quad (2)$$

令  $\nu$ 表示B车司机接收到的笛声的频率, 由多普勒效应可知

$$\nu = \frac{u - v_B \cos \theta_{B(t)}}{u + v_A \cos \theta_{A(t_1)}} \nu_0 \quad (3)$$

由式(1)、(2)、(3), 得

$$\nu = \frac{u^2 (\sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2} - v_A^2 v_B^2 - v_A^2) - v_B^2 (u^2 - v_A^2)}{(u^2 - v_A^2) \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}} \nu_0$$

**点评:** 在经典物理中, 只有纵向多普勒效应, 没有横向多普勒效应, 所以需将笛声沿着在A与B两车连线进行分解.

### 3.2 光波的多普勒效应

**【例2】**(第31届全国中学生竞赛复赛第8题) 天文观测表明, 远处的星系离我们而去. 著名的哈勃定律指出星系离我们的速度大小  $v = HD$ , 其中  $D$ 为星系与我们之间的距离, 该距离通常以百万秒差距(Mpc)为单位;  $H$ 为哈勃常数, 最新的测量结果为  $H = 67.80 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ . 当星系离我们远去时, 它发出的光谱线的波长会变长(称为红移). 红移量  $z$ 被定义为  $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$ , 其中  $\lambda'$ 是我们观测到的星系

中某恒星发出的谱线的波长, 而  $\lambda$ 是实验室中测得的同种原子发出的相应谱线的波长, 该红移可用多普勒效应解释. 绝大部分星系的红移量  $z$ 远小于1, 即星系退行速度远小于光速. 在一次天文观测中发现从天鹰座的一个星系中射来的氢原子光谱中有两条谱线, 它们的频率  $\nu'$ 分别为  $4.549 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 和  $6.141 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . 由于这两条谱线处于可见光频率

区间,可假设它们属于氢原子的巴尔末系,即为  $n > 2$  的能级向  $k=2$  的能级跃迁而产生的光谱.(已知氢原子的基态能量  $E_0 = -13.6 \text{ eV}$ ,真空中的光速  $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ ). 普朗克常量  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,电子电荷量  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

(1) 该星系发出的光谱线对应于实验室中测出的氢原子的哪两条谱线? 它们在实验室中的波长分别是多少?

(2) 求该星系发出的光谱线的红移量  $z$  和该星系远离我们的速度大小  $v$ .

(3) 求该星系与我们的距离  $D$ .

**解析:**(1) 由题给条件观测到星系的谱线的频率分别为  $\nu'_1 = 4.549 \times 10^{14} \text{ Hz}$  和  $\nu'_2 = 6.141 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ,它们分别对应于在实验室中观测得的氢原子光谱的两条谱线  $\nu_1$  和  $\nu_2$ . 由红移量  $z$  的定义,根据波长与频率的关系  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  可得

$$z = \frac{\nu_1 - \nu'_1}{\nu'_1} = \frac{\nu_2 - \nu'_2}{\nu'_2} \quad (4)$$

式中,  $\nu'$  是我们观测到的星系中某恒星发出的频率,而  $\nu$  是实验室中测得的同种原子发出的相应的频率. 上式可写成

$$\frac{1}{\nu'_1} = (1+z) \frac{1}{\nu_1}$$

$$\frac{1}{\nu'_2} = (1+z) \frac{1}{\nu_2}$$

由氢原子能级公式

$$E_n = \frac{E_0}{n^2}$$

得到巴尔末系的能谱线为

$$h\nu = \frac{E_0}{n^2} - \frac{E_0}{2^2}$$

由于  $z$  远小于 1, 光谱线红移后的频率近似等于其原频率, 把  $\nu'_1$  和  $\nu'_2$  分别代入上式, 得到这两条谱线的相应能量级的量子数

$$n_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h\nu'_1}{E_0}}} \approx 3$$

$$n_2 \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{h\nu'_2}{E_0}}} \approx 4$$

从而,证实它们分别由  $n=3$  和  $n=4$  向  $k=2$  的能级跃迁产生的光谱,属于氢原子谱线的巴尔末系,这两条谱线在实验室的频率分别为

$$\nu_1 = -\frac{E_0}{h} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 4.567 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\nu_2 = -\frac{E_0}{h} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 6.166 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

由  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  得,在实验室中与之相应的波长分别是

$$\lambda_1 = 656.4 \text{ nm} \quad \lambda_2 = 486.2 \text{ nm}$$

(2) 由式(4)可知

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu_1 - \nu'_1}{\nu'_1} + \frac{\nu_2 - \nu'_2}{\nu'_2} \right) = 0.0040$$

由于多普勒效应,观测到的频率

$$\nu' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \nu$$

因为  $x \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$ ,  $v \ll c$ , 可推得

$$z = \frac{v}{c}$$

从而,该星系远离我们的速度大小为

$$v = zc = 0.0040 \times 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} = 1.2 \times 10^6 \text{ m/s}$$

(3) 由哈勃定律,该星系与我们的距离

$$D = \frac{v}{H} = \frac{1.2 \times 10^6}{6.780 \times 10^4} \text{ Mpc}$$

**点评:**本题主要考查光的多普勒效应,由于学生对光波的多普勒效应比较陌生,绝大多数同学都做不出本题的(2)、(3)两问,其实本题(2)、(3)两问比较简单,如果如果学生掌握了电磁波的多普勒效应公式,很容易做出本题.

要特别关注竞赛内容的调整变化,敏锐地捕捉和准确地理解考纲调整的信息,只有这样,奥赛辅导才能既不留死角,又突出重点,从而适应新考纲,迎接新挑战.

### 参考文献

- 程稼夫. 中学奥林匹克竞赛物理教程·力学篇. 合肥: 中国科技大学出版社, 2002. 347
- 程守洙, 江之永. 普通物理学(第三册). 北京: 高等教育出版社, 1998. 143