与均匀带电圆环有关的电势计算

陈　钢
（苏州大学物理与光电·能源学部　江苏 苏州　215005）
刘　晓
（吴江市七都中学　江苏 苏州　215234）

（收稿日期：2015－03－30）

摘　要：本文给出了一些与均匀带电圆环有关的电势计算实例，这些实例所涉及的微积分都是一些可被中学生理解和接受的基本微积分关系，为在高中物理运用微积分运算提供了有意义的示例.

关键词：微积分　均匀带电圆环　电势

在电磁学中常常运用微积分方法计算带电体在空间中的电势，根据电势叠加原理，带电体在空间中的电势由电荷微分元的电势叠加即积分来计算.现行高中数学已经引进了高等数学的微积分运算，因而在高中物理中可以运用微积分运算求解一些电势问题，高中阶段所能运用的微积分较为简单，对一般带电体电势的计算存在困难，但是对一些典型的均匀带电体，由于电荷分布较为简单，可以用较为简单的微积分方法计算电势.

均匀带电圆环是一种典型的带电体，带电圆环在垂直于圆环面的中轴线上的电势可以用简单微积分来计算，可以作为高中物理运用微积分运算的实例.利用圆环中轴线上的电势分布结果，又可以计算另外一些可微分为圆环的电势分布问题，这种“层次”微分方法很好地体现了微积分的思想，在微积分计算中具有典型意义.

1　均匀带电圆环中轴线上的电势分布

如图 1，半径为 r 的均匀带电圆环，取圆环轴线上任一点 P，P 点与环心的距离为 x.在圆环上取电荷微元 $\mathrm{d}l$，它与 P 点的距离为 $R=\sqrt{r^2+x^2}$，则

$$\mathrm{d}q=\frac{q}{2\pi r}\mathrm{d}l \tag{1}$$

那么 $\mathrm{d}q$ 在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} \tag{2}$$

根据电势叠加原理，积分得出 P 点处的电势

$$\varphi=\int_0^{2\pi r}\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\int_0^{2\pi r}\frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+x^2}}\mathrm{d}l=$$

$$\frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+x^2}}2\pi r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} \tag{3}$$

取 $x=0$，即得圆环中心处电势

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{4}$$

由式(3)电势分布可知，圆环中心电势是中轴线上电势的最大值.

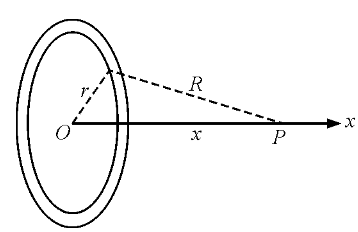

图 1　均匀带电圆环在中轴线上的电势

2　均匀带电圆盘中轴线上的电势分布

许多带电体模型可以分割为圆环的组合形式，即可以分割为以圆环为微分元的连续带电体.若把均匀带电圆环作为微分元，由式(3)可得均匀带电圆环微分元在其轴线上的电势分布为

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

其中 $\mathrm{d}q$ 是微分圆环的电荷量；r 是微分圆环的半径；x 是微分圆环的圆心到轴线上 P 点的距离.

半径为 R 的均匀带电圆盘可以被微分为半径连

续变化的微分圆环,如图 2 所示,把圆盘分割成许多半径为 r,宽度为 $\mathrm{d}r$ 的微分圆环,则微分圆环的面积为 $2\pi r\mathrm{d}r$,带电量 $\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$,式中 σ 为电荷面密度.

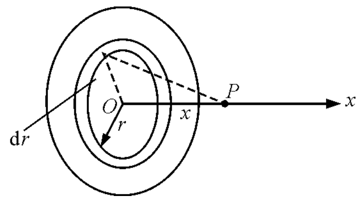

图 2　圆盘上的均匀带电微分圆环

利用式(3) 均匀带电圆环电势的结果,容易求出均匀带电圆盘轴线上 P 点处的电势

$$\varphi=\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}=$$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right) \tag{5}$$

取 $x=0$,即得圆盘中心处电势

$$\varphi=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R} \tag{6}$$

由式(6) 可知,相比于圆环电荷集中分布于环上,带电圆盘的电荷均匀分布在从中心到边缘的圆盘面上,电荷更"靠近" 中心点,所以圆盘中心电势升高.

3　均匀带电半球壳中轴线上的电势分布

半径为 R 的均匀带电半球壳也可被微分为半径连续变化的微分圆环,如图 3 所示,均匀带电半球壳电荷密度 $\sigma=\dfrac{q}{2\pi R^2}$,在半球壳上取微分圆环,微分圆环半径 $r=R\sin\theta$,宽度为 $R\mathrm{d}\theta$,长度 $2\pi r=2\pi R\sin\theta$,所取微分圆环带电荷量

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\cdot R\mathrm{d}\theta=\sigma 2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta=q\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

以半球壳中心为 x 轴坐标原点,则所取微分圆环中心到 P 点的距离 $x'=x-R\cos\theta$,均匀带电微分圆环在中轴线上 P 点处产生的电势为

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2\sin^2\theta+(x-R\cos\theta)^2}}=$$

$$\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2-2xR\cos\theta+x^2}}=$$

$$\frac{q\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2-2xR\cos\theta+x^2}}$$

半球壳在中轴线上 P 点的电势

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2-2xR\cos\theta+x^2}}=$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{\sqrt{R^2+x^2}-|x-R|}{x} \tag{7}$$

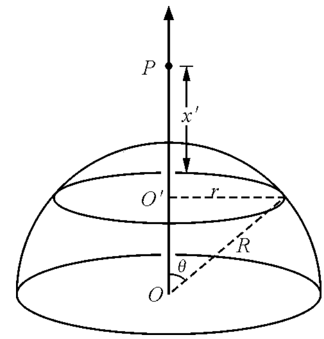

图 3　均匀带电球壳上的均匀带电微分圆环

取 $x=0$,就可以得出半球壳中心处的电势,但是这个电势由式(7) 讨论较为复杂,涉及到取极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{R^2+x^2}-|x-R|}{x}$,容易看出这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 的极限,求这个极限需要运用大学中所学习的罗必塔法则.但由于电荷均匀分布在半球壳上,可以直接得出半球壳中心的电势为

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

比较可知极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{R^2+x^2}-|x-R|}{x}=1$$

这个结果与运用罗必塔法则所求结果一致.

取 $x=\infty$,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{R^2+x^2}-|x-R|}{x}=\frac{|x|-|x|}{x}=0$$

无穷远处电势为零,符合有限大小带电体在无限远处电势为零的基本特征.由于 $x>0$,容易看出当 $x=R$ 时,函数取得最大值

$$\max\left(\frac{\sqrt{R^2+x^2}-|x-R|}{x}=\frac{\sqrt{R^2+x^2}}{x}-\frac{|x-R|}{x}\right)=\sqrt{2}$$

得到半球壳顶点处的电势

$$\varphi=\sqrt{2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

此处电势高于半球壳中心的电势,即半球顶点处的电势就是轴线上电势的最大值.

通过上述 3 种电荷分布电势的积分可以看出,3 种带电体电势的求解都涉及圆环积分,3 种情况下积分的形式由简单到复杂,虽然形式不同但都是一

摆球运动中极值问题的解析

耿腊香
（前黄高级中学国际分校　江苏 常州　213161）

（收稿日期：2015－02－01）

摘　要：近几年来，江苏物理高考卷中频频出现摆球运动的极值问题，值得我们师生引起重视. 作者将此类问题加以总结归纳，集中探究了摆球在自由运动、匀速率运动、受水平恒力作用这 3 种情况下速度与重力功率的极值问题，并介绍了极限法、数学求导法、仿真物理实验这 3 种求极值问题的方法.

关键词：摆球　极值问题　类单摆　仿真物理实验室

1　单摆中的极值问题

【**例 1**】如图 1 所示，一根不可伸长的轻绳长为 L，一端固定于 O 点，另一端连接质量为 m 的小球，使小球从水平位置 A 点静止释放. 小球从 A 点摆动到最低点 B 点的过程中，重力对小球做功的功率如何变化？

解法 1：极限法

此题为 2008 年高考江苏卷第 8 题的原型，可采用极限法解答. 因为最高点（A 点）小球速度为零，所以 A 点小球重力功率为零；最低点（B 点）速度与重力垂直，所以 B 点重力功率也为零. 因此小球从最高点摆动到最低点的过程中，重力对小球做功的功率先增大后减小. 但对于这种定性分析的结果还远远

些基本积分形式，可以在高中所学微积分范围内被学生所接受和理解，它们为高中微积分在物理中的实际应用提供了有意义的教学实例.

参 考 文 献

1　（美）E·M·哈塞尔. 伯克利物理学教程（第 2 卷）. 南开大学物理系译. 北京：科学出版社，1979. 59
2　蒋卫健，胡昉，方本民. 均匀带电非导体圆盘边缘的电势的几种解法. 大学物理，2013，32(8)：24 ～ 28
3　斯迈思 W R. 静电学与电动力学. 戴世强译. 北京：科学出版社，1981. 35 ～ 36，177
4　熊建平. 导体薄圆盘的电荷分布. 大学物理，1999，18(5)：8 ～ 10
5　陈钢，刘晓，李成金. 导体圆盘电容的计算. 物理通报，2015(7)：21 ～ 23

Calculation on the Electric Potential Relating to the Uniformly Charged Ring

Chen Gang　Liu Xiao
(School of Physics and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu　215006)

Abstract: High school physics has introduced derivative and integral, which is the most important mathematical tool for physics theory study and actual calculation. This paper presents some examples of potential calculation related to uniformly charged ring, and the basic calculus involved in can be understood and accepted by high school students. Therefore, it provides a meaningful example for calculus is used in high school physics.

Key words: derivative and integral; uniformly charged ring; potential