$\frac{v_t^2 - v_0^2}{2a}$ 改写为 $s = \frac{v_t^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}$，则反映在图像上为大三角形减去小三角形. 即剩下图中梯形的面积，如图 4(a) 所示.

此时若将速度坐标轴右移至 $\frac{v_0}{a}$ 处，并以此为原点，得到的图像与常规的匀变速直线运动的 $v-t$ 图像一致，如图 4(b) 所示.

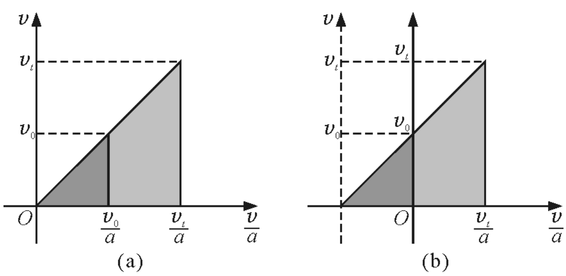

图 4

3　换一个角度讨论

有了这个分析基础之后，我们不妨直接从 $s = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2a}$ 出发来理解其中的物理意义. 将公式 $s = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2a}$ 改写成 $s = (v_t^2 - v_0^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}$

(1) 先构造 $s = (v_t^2 - v_0^2)$，即为图中阴影部分，如图 5(a) 所示.

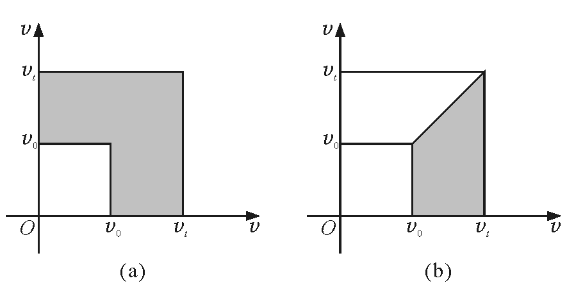

图 5

(2) 构造 $(v_t^2 - v_0^2) \cdot \frac{1}{2}$，即将面积变为原来的一半，如图 5(b) 中阴影所示.

(3) 调整坐标，将 $v-v$ 图转化成 $v-t$ 图，如图 6(a) 所示. 此图像只要同样变换纵坐标的位置，即可得到一般的速度-时间图像，如图 6(b) 所示.

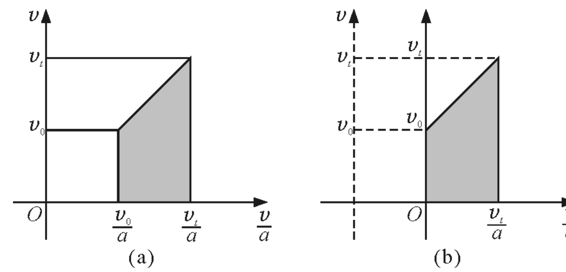

图 6

4　结语

通过上述对于匀变速直线运动速度与位移公式的图像解析，进一步明确了其内在的物理意义，对于学生充分理解匀变速直线运动的规律有较大的裨益.

一个力学问题的数学解法

钱厚旺　　陈玉奇

(江苏省姜堰中等专业学校　江苏 泰州　225500)

(收稿日期：2015-04-07)

【题目】(2014 年全国周培源大学生力学竞赛第 3 题)：有一个内壁光滑的固定容器，如图 1 所示，该容器的内壁是一条抛物线绕着其对称轴旋转而得到的曲面. 为了确定这条抛物线的方程，小明和小刚用一根长度为 400 mm 的同样光滑的匀质直杆 AB 数次随意放入容器之中时，发现尽管各次放入后杆件滑动和滚动的情况都不一样，但最终静止时与水平面的夹角每次都是 45°，试确定这条抛物线的方程.

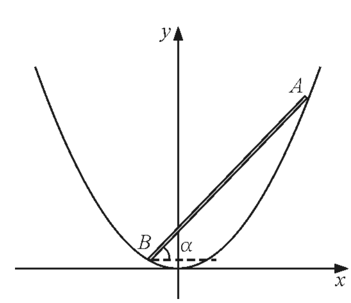

图 1

本题可用大学物理中的最小势能原理、虚位移原理或刚体静力学的知识分析求解，详见解答和评分标准. 但对于该题，也可以从数学的角度，用高中知识来求抛物线的方程.

解析：作出杆 AB 的受力情况，如图 2. 根据 3 力汇交原理可知，杆平衡时，弹力 N_1，N_2 和重力 G 必相交于一点，记为 D.

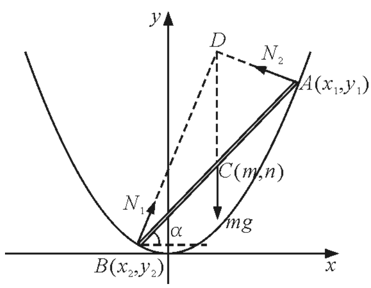

图 2

设杆 AB 静止时与水平方向的夹角为 α，其直线方程为 $y=kx+b$，$k=\tan\alpha$. 并设抛物线方程为 $y=ax^2$，杆与抛物线的交点坐标为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，质心坐标为 $C(m,n)$，则有

$$x_1+x_2=2m$$

将质心坐标 $C(m,n)$ 代入 $y=kx+b$，求出

$$b=n-km$$

所以

$$y=kx+n-km$$

则直线和抛物线的交点满足方程

$$ax^2-kx-n+km=0$$

由韦达定理并结合质心坐标，有

$$x_1+x_2=\frac{k}{a}=2m$$

所以

$$2am=k$$

设杆长为 $2L$，由几何关系，有

$$x_1=m+L\cos\alpha$$

$$x_2=m-L\cos\alpha$$

则 A 点和 B 点的切线斜率分别为

$$k_1=(ax^2)'|_{x=x_1}=2ax_1=$$

$$2a(m+L\cos\alpha)=2am+2aL\cos\alpha=k+2aL\cos\alpha$$

$$k_2=(ax^2)'|_{x=x_2}=2ax_2=$$

$$2a(m-L\cos\alpha)=2am-2aL\cos\alpha=k-2aL\cos\alpha$$

所以 AD 所在的直线方程为

$$y_{AD}=-\frac{1}{k+2aL\cos\alpha}(x-x_1)+y_1=$$

$$-\frac{1}{k+2aL\cos\alpha}(x-m-L\cos\alpha)+a(m+L\cos\alpha)^2$$

BD 所在的直线方程为

$$y_{BD}=-\frac{1}{k-2aL\cos\alpha}(x-x_2)+y_2=$$

$$-\frac{1}{k-2aL\cos\alpha}(x-m+L\cos\alpha)+a(m-L\cos\alpha)^2$$

因为 AD 和 BD 交于直线 $x=m$ 上的点，将 $x=m$ 代入 AD 和 BD 的表达式，有

$$-\frac{1}{k+2aL\cos\alpha}(m-m-L\cos\alpha)+a(m+L\cos\alpha)^2=$$

$$-\frac{1}{k-2aL\cos\alpha}(m-m+L\cos\alpha)+a(m-L\cos\alpha)^2$$

整理后可得

$$-\frac{1}{k-2aL\cos\alpha}-\frac{1}{k+2aL\cos\alpha}=4am$$

将 $2am=k$ 及 $k=\tan\alpha$ 代入，整理后有

$$4a^2L^2\cos^2\alpha=\tan^2\alpha+1$$

从而

$$a=\frac{1}{2L\cos^2\alpha}$$

上式给出了杆在抛物面中处于倾斜平衡时，抛物线的形状与杆长 L 及杆和水平方向的夹角 α 之间的制约关系. 若已知其中的任意两个量，便可根据上式求出第 3 个量.

在本题中，$L=200$ mm，$\alpha=45°$，代入 $a=\dfrac{1}{2L\cos^2\alpha}$ 中，可得

$$a=\frac{1}{200}$$

所以抛物线的表达式为

$$y=\frac{1}{200}x^2$$