

从“两个半径的大小关系”入手分析 带电粒子在圆形磁场中的运动

李伟康

(芜湖市第一中学 安徽 芜湖 241000)

(收稿日期:2015-07-15)

摘要:带电粒子在磁场中的运动涉及到的物理知识和方法较多,学生在运动情境的再现和几何关系的寻找上更是感到非常困难.这其中尤其以圆形磁场中的运动问题较难,涉及到两个圆及圆与边的复杂的关系,对粒子运动的约束条件较为隐蔽,此类问题学生感到无从下手.本文从圆形磁场区域半径 R 和带电粒子轨迹半径 r 的大小关系入手,详细梳理了粒子在圆形磁场区域中运动的特点,并在解决两个难解例题中加以了应用.

关键词:圆形磁场 平行汇聚原理 射出区域范围 运动最长时间

1 当 $r=R$ 时

本文中 r 为带电粒子轨迹的半径, R 为圆形匀强磁场区域的半径.

此种情况,带电粒子在匀强磁场中的运动有两个互逆的特殊结论,我们形象地称之为“发散平行原理”和“平行汇聚原理”(不计重力等其他非磁场力作用).

发散平行原理:当一束相同的带电粒子从磁场边界上同一点沿不同方向射入磁场区域,且轨迹半径等于圆形磁场区域半径时,这束粒子将沿同一方向平行射出磁场区域(如图1左图所示).

平行汇聚原理:当一束相同的带电粒子沿同一方向平行射入磁场区域,且轨迹半径等于圆形磁场区域半径时,这束粒子将从磁场边界上同一点射出磁场区域(如图1右图所示).

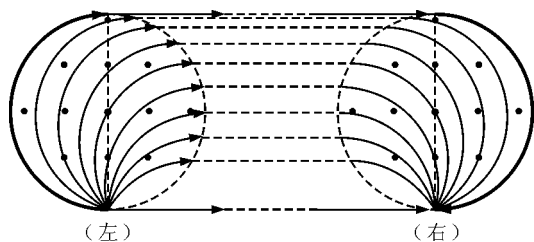


图1

此处不再证明.

(1) 出射点分布范围

如图1左图所示,临界状态为粒子刚好沿磁场边界做匀速圆周运动,粒子无法射出磁场.粒子射出

磁场的位置(出射点)分布在磁场区域右边半个边界上,即射出区域范围长度刚好为磁场区域周长的一半.

(2) 运动最长时间

粒子在磁场中运动的最长时间对应最长的弧长,如图1左图所示,最长弧长刚好等于磁场区域周长的一半,亦是粒子轨迹周长的一半,最长时间等于粒子做圆周运动周期的一半,即 $t_{\max} = \frac{T}{2}$.

(3) 同一出射点对应时间的唯一性

由于 $r=R$,出射点为同一点,但对应的运动时间不唯一,可以在 $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ 之间取任意值.

2 当 $r < R$ 时

(1) 出射点分布范围

当出射点离入射点最远时,该两点的连线(为轨迹圆的弦)最长,最长只能等于轨迹圆的直径,如图2(a)所示.采用“旋转法”分析易知,出射点最近可接近入射点,所以粒子出射点的位置分布在磁场边界 PS 这段劣弧上.

(2) 运动最长时间

显然由于 $r < R$,粒子可在磁场中做完整的圆周运动,故无最长时间,如图2(b)所示.

(3) 同一出射点对应时间的唯一性

由于 $r < R$,所以在磁场区域中粒子运动轨迹既可以为劣弧,也可以为优弧.磁场边界上同一出射

点对应两段不同的运动时间(直径端点除外),运动轨迹一个为劣弧,另一个为优弧,具有相同的弦,如图2(c)所示.

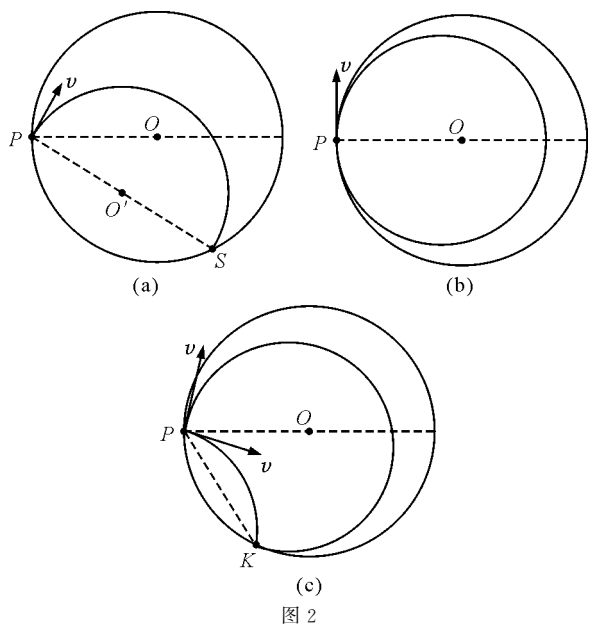


图2

3 当 $r > R$ 时

(1) 出射点分布范围

采用“旋转法”分析易知,出射点可在磁场边界上任意位置.

(2) 运动最长时间

对轨迹半径大小确定的粒子,圆心角越大,运动时间越长,此时其轨迹对应的弧长也越长.由于 $r > R$,所以粒子在磁场区域中的轨迹一定为一条劣弧,而对劣弧而言,轨迹弧长越长,其对应的弦长也越长,显然此时最长弦长为磁场区域的直径,如图3所示.

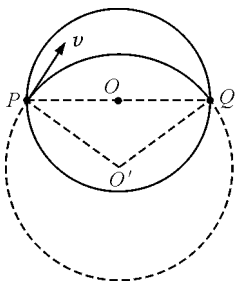


图3

(3) 同一出射点对应时间的唯一性

由于 $r > R$,所以在磁场区域中粒子运动轨迹只能为劣弧.磁场边界上同一出射点对应唯一的运动时间.

【例1】如图4所示,在半径为 R 的圆形区域内,

有一匀强磁场,其方向垂直于圆平面(未画出).一群相同的带电粒子以相同速率 v_0 ,由 P 点在纸平面内向不同方向射入磁场.当磁感应强度大小为 B_1 时,所有粒子射出磁场的区域占整个圆周长的 $\frac{1}{3}$;当磁感应强度大小减小为 B_2 时,这些粒子在磁场中运动的时间最长的是 $\frac{2\pi R}{3v_0}$.则磁感应强度 B_1, B_2 的比值是(不计重力)

- A. $1 : \sqrt{3}$ B. $2 : \sqrt{3}$ C. $3 : \sqrt{3}$ D. $4 : \sqrt{3}$

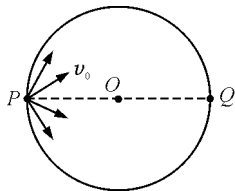


图4

解析:当磁感应强度大小为 B_1 时,设此时粒子的转动半径为 r_1 ,由所有粒子射出磁场的区域占整个圆周长的 $\frac{1}{3}$,可知其轨迹半径 r_1 必小于磁场区域半径 R ,如图5(a)所示, $\angle POS = \frac{2\pi}{3}$,由几何关系可知, $r_1 = R \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$;当磁感应强度大小减小为 B_2 时,粒子的转动半径增大,由这些粒子在磁场中运动时间最长的是 $\frac{2\pi R}{3v_0}$,可知此时粒子的轨迹半径 r_2 必大于磁场区域半径 R ,当其在磁场中运动时间最长时,其运动轨迹对应的弦长应该最长,最长只能等于磁场区域的直径 $2R$,如图5(b)所示.

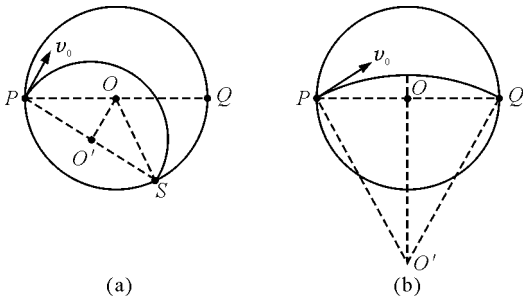


图5

则有 $r_2 \sin \theta = R$,已知 $t = \frac{2\pi R}{3v_0}$,所以

$$t = \frac{2\pi r_2 \sin \theta}{3v_0} = \frac{2\pi m \sin \theta}{3Bq}$$

又 $t = \frac{2\theta m}{Bq}$,所以 $\theta = \frac{\pi}{3} \sin \theta$,即 $\theta = \frac{\pi}{6}$,故 $r_2 = 2R$,由

$$r = \frac{mv}{Bq}, \text{ 知 } \frac{B_1}{B_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

点评:本题中两种情况涉及到的粒子初速度方向和轨迹半径均不具有直观可比性,学生甚至画不出粒子对应的运动轨迹,感到无从下手.若有本文中前述规律为基础,本题的分析则显得较为顺利,从而可轻松求解.

【例2】如图6(a)所示,半径为 R 的半圆形区域内分布着垂直纸面向里的匀强磁场,磁感应强度为 B ,半圆的左边垂直 x 轴放置一粒子发射装置,在 $-R \leq y \leq R$ 的区间内各处均沿 A 轴正方向同时发射出一个带正电粒子,粒子质量均为 m ,电荷量均为 q ,初速度均为 v ,重力及粒子间的相互作用均忽略不计,所有粒子都能到达 y 轴,其中最后到达 y 轴的粒子比最先到达 y 轴的粒子晚 Δt 时间,则

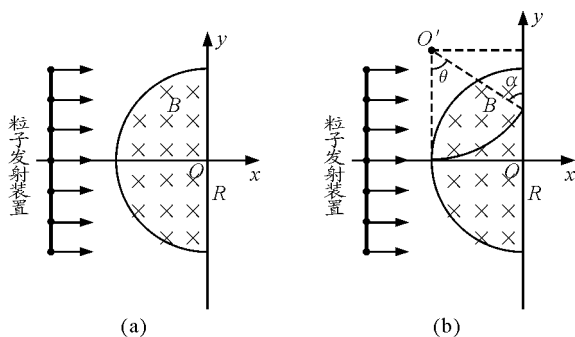


图6

A. 粒子到达 y 轴的位置一定各不相同

B. 磁场区域半径 R 应满足 $R \geq \frac{mv}{Bq}$

C. $\Delta t = \frac{\theta m}{Bq} - \frac{R}{v}$, 其中角度 θ 的弧度值满足

$$\sin \theta = \frac{BqR}{mv}$$

D. $\Delta t = \frac{\pi m}{Bq} - \frac{R}{v}$

解析:当 $\frac{mv}{Bq} = R$ 时,由“平行汇聚原理”易知,在

x 轴上方发射的粒子将全部到达 $(0, R)$ 处,而在 x 轴下方发射的粒子将分别到达 y 轴上不同的位置,故A项错误;由题意“所有粒子都能到达 y 轴”,可知

一定满足 $\frac{mv}{Bq} \geq R$,故B项错误;到达 y 轴的粒子的

速度偏转角设为 θ ,一定有 $\theta \leq \frac{\pi}{2}$,即最后到达 y 轴

的粒子在磁场中的运动时间 $t_1 \leq \frac{\pi m}{2Bq}$,而最先到达

y 轴的粒子通过水平位移 R 的时间 $t_2 = \frac{R}{v}$,所以

$\Delta t \leq \frac{\pi m}{2Bq} - \frac{R}{v}$,故D项错误;所以正确答案为C项.

那么C项中的表达式是如何得出的呢?易知从 $y=0$ 处发射的粒子是最后到达 y 轴的,如图6(b)所示,其轨迹对应的圆心角为 θ ,则 $\Delta t = \frac{\theta m}{Bq} - \frac{R}{v}$,又

$\sin \alpha = \frac{R}{r} = \frac{BqR}{mv}$,且 $\alpha = \theta$,所以 $\sin \theta = \frac{BqR}{mv}$.

点评:若不知道“在圆形匀强磁场区域中,当粒子轨迹半径等于磁场区域半径时,平行射入的粒子会汇聚于磁场边缘一点”,本题的分析是很难展开的.

Analysis on the Charged Particles Motion in A Circular Magnetic Field based on The Size of Relationship between The Two Radii

Li Weikang

(Wuhu No. 1 Senior School, Wuhu, Anhui 241000)

Abstract: Many physical knowledge and methods are covered in the movement of charged particles in a magnetic field. Students may find difficulty handling problems of reproduction and geometric relation of the moving cases above. Especially, the problems related to the moving case of circular magnetic field which cover the complex relationship between two circles and between the circle and side are very difficult. Besides, the constraint conditions on the particle motion are more obscure. In this article, starting from the relationship between the magnitude of circular magnetic field with radius "R" and the trajectory of a charged particle radius "r", the characteristics of the moving particle in a circular magnetic field are analyzed and two difficult examples are solved to further illustrate the application.

Key words: circular magnetic field; the principle of parallel convergence; the range of the injection region; the longest time of motion.