



乒乓球落在球网右侧台面的逻辑推理与引申讨论

王松涛

(中山市华侨中学 广东 中山 528400)

(收稿日期:2015-09-22)

摘要:对2015年高考题中乒乓球落在球网右侧台面的实际问题进行逻辑推理、疑点辨析和引申讨论.

关键词:逻辑推理 引申讨论 乒乓球

下面是2015年高考全国新课标卷 I 理科综合的一道考试题,请看原题.

【题目】(2015年高考全国新课标卷1第18题)一带有乒乓球发射机的乒乓球台如图1所示.水平台面的长和宽分别为 L_1 和 L_2 ,中间球网高度为 h .发射机安装于台面左侧边缘的中点,能以不同速率向右侧不同方向水平发射乒乓球,发射点距台面高度为 $3h$.不计空气的作用,重力加速度大小为 g .若乒乓球的发射速率 v 在某范围内,通过选择合适的方向,就能使乒乓球落到球网右侧台面上,则 v 的最大取值范围是

- A. $\frac{L_1}{2} \sqrt{\frac{g}{6h}} < v < L_1 \sqrt{\frac{g}{6h}}$
- B. $\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$
- C. $\frac{L_1}{2} \sqrt{\frac{g}{6h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$
- D. $\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$

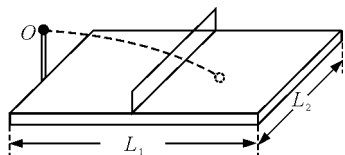


图1

1 本题逻辑推理过程

本题考查平抛运动及临界状态相关知识,正确答案选D.其推理过程如下.

(1) 通过选择合适的方向,乒乓球能够飞过球网,才能落在球网右侧台面上.

设乒乓球水平发射时的速度大小为 v_1 时,乒乓球恰能从球网上边缘中点 P 通过.则

$$3h - h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{L_1}{2} = v_1 t$$

所以

$$v_1 = \frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

此为乒乓球能够飞过球网的临界速度.

论断一:

若水平发射速度

$$v < \frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

则不论怎样改变方向,乒乓球都不能飞过球网.

若水平发射速度

$$v > \frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

通过选择合适的方向,乒乓球就能飞过球网.

(2) 假设没有球网, 乒乓球不从右侧台面飞出, 才能落在球网右侧台面上.

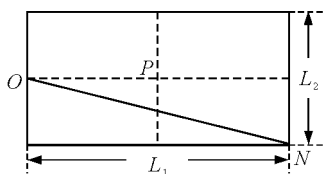


图 2

设乒乓球水平发射时的速度大小为 v_2 时, 乒乓球恰能从右侧台面的角 N 点飞出, 如图 2 所示. 则

$$3h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{L_2}{2}\right)^2 + L_1^2} = v_2 t$$

所以

$$v_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

此为乒乓球不从球台右侧飞出的临界速度.

论断二:

若水平发射速度

$$v > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

则不论怎样改变方向, 乒乓球一定会从球台右侧飞出.

若水平发射速度

$$v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

通过选择合适的方向, 乒乓球就能不从右侧台面飞出.

(3) 结论

若水平发射速度 $v_1 < v < v_2$, 即

$$\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

通过选择合适的方向, 乒乓球就能飞过球网且不从右侧台面飞出, 即乒乓球就能落到球网右侧台面上, 故正确选项为 D.

2 本题逻辑推理疑点

表面上看, 本推理过程逻辑严密, 步骤清晰, 但

仔细分析会发现结论的得出至少存在两个逻辑推理疑点.

2.1 速度范围存在的疑点

若水平发射速度 v 的取值范围是

$$\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

通过选择合适的方向, 乒乓球就能落到球网右侧台面上. 这里速度范围一定存在吗? 如果 $v_1 > v_2$, 即恰能从 P 点飞过球网的乒乓球以同样的水平发射速度在没有球网的情况下能够从右侧台面的角 N 点飞出台面, 那么只要飞过球网的乒乓球不论选择什么方向都一定会从右侧台面飞出而不会落在台面上, 此为疑点一. 容易证明在本题中

$$\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

故该范围存在.

2.2 合适速度方向存在的疑点

若水平发射速度

$$v > \frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

通过选择合适的方向, 乒乓球就能飞过球网.

若水平发射速度

$$v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

通过选择合适的方向, 乒乓球就能不从右侧台面飞出.

于是得出: 若水平发射速度 v 的取值范围是

$$\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

通过选择合适的方向, 乒乓球就能落到球网右侧台面上. 这里两种情形中都要通过选择合适的方向, 乒乓球才能落在右侧台面上. 如图 3 和图 4, 若水平发射速度 v 的取值范围为

$$\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

中某一值, 乒乓球能够飞过球网的速度方向在范围 I 内, 而假设没有球网乒乓球不从右侧台面飞出时

速度方向在范围Ⅱ内,如果范围Ⅰ和范围Ⅱ没有交集,则即使水平发射速度 v 的取值范围为

$$\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

无论选择什么方向,乒乓球都不能落在右侧台面上,此为疑点二.

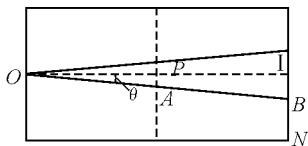


图3

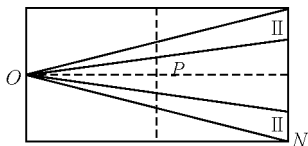


图4

就本题而言,设以水平发射速度 v 通过球网时,速度方向的范围Ⅰ的边界之一为 OA , OA 与 OP 的夹角为 θ .乒乓球恰好能过球网上边缘的 A 点,则

$$\frac{L_1}{2\cos\theta} = vt$$

$$3h - h = \frac{1}{2}gt^2$$

所以

$$v = \frac{L_1}{4\cos\theta} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

假设没有球网,乒乓球沿 OA 方向恰能从右侧台面边缘的 B 点飞出时对应的水平发射速度设为 v' ,则

$$\frac{L_1}{\cos\theta} = v't$$

$$3h = \frac{1}{2}gt^2$$

所以

$$v' = \frac{L_1}{\cos\theta} \sqrt{\frac{g}{6h}}$$

由于 $v < v'$,所以以水平速度 v 发射的乒乓球恰能从球网上边缘的 A 点通过球网且不能从同一方向飞出右侧台面,即范围Ⅰ和范围Ⅱ一定有交集.故水平发射速度 v 的取值范围是

$$\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$$

一定可以通过选择合适的方向使乒乓球落在右侧台面上.

3 乒乓球能够落在右侧台面的必然性讨论

本题解答的结论“若水平发射速度 v 的取值范围在 $\frac{L_1}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} < v < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{6h}}$,通过选择合适的方向,乒乓球就能落到球网右侧台面上”.通过以上的分析计算说明,在本题所给数据条件下,不仅速度范围存在,而且也一定可以选择到合适的方向使乒乓球能落到球网右侧台面上.如果跳出原题所给数据,结合实际情况,进一步的疑问是这里 $v_1 < v < v_2$ 的速度范围一定存在吗?合适的速度方向一定可以找到吗?如果不是,那么条件又是什么呢?

3.1 速度范围存在的必然性

水平发射的乒乓球做平抛运动,其运动情况与水平发射速度和高度有关.若发射点距离台面高度为 H ,乒乓球恰能从球网上边缘中点 P 通过时的临界速度仍设为 v_1 ,则

$$H - h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{L_1}{2} = v_1 t$$

所以

$$v_1 = \frac{L_1}{2} \sqrt{\frac{g}{2(H-h)}}$$

同样,设乒乓球水平发射时的速度大小为 v_2 时,乒乓球恰能从右侧台面的角 N 点飞出.则

$$H = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{L_2}{2}\right)^2 + L_1^2} = v_2 t$$

所以

$$v_2 = \sqrt{\frac{(4L_1^2 + L_2^2)g}{8H}}$$

若 $v_1 > v_2$,则

$$H < \frac{(4L_1^2 + L_2^2)h}{3L_1^2 + L_2^2}$$

根据国际乒联对乒乓球台的规定

$$L_1 = 2.74 \text{ m}$$

$$L_2 = 1.525 \text{ m}$$

所以

$$H < 1.3h$$

若水平发射点距离台面高度为

$$H < 1.3h$$

则

$$v_1 > v_2$$

即 $v_1 < v < v_2$ 的速度范围并不存在,那么不论怎样选择速度方向,乒乓球都不能落在球网右侧台面上.

3.2 合适速度方向存在的必然性

由以上讨论知,若水平发射点距离台面高度为

$$H > 1.3h$$

则

$$v_1 < v_2$$

那么在 $v_1 < v < v_2$ 的范围内,是否一定可以选择到合适的方向使乒乓球落在右侧台面上呢?

设水平发射速度 $v_1 < v < v_2$,乒乓球恰能飞过球网上边缘的 C 点, OC 与 OP 的夹角为 α ,如图 5 所示.

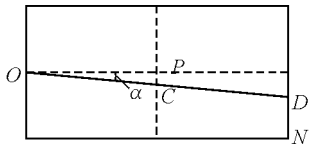


图 5

则

$$\frac{L_1}{2\cos\alpha} = vt$$

$$H - h = \frac{1}{2}gt^2$$

所以

$$v = \frac{L_1}{2\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2(H-h)}}$$

假设没有球网,乒乓球沿 OC 方向恰能从右侧台面边缘的 D 点飞出时对应的水平发射速度设为

v' , 则

$$\frac{L_1}{\cos\alpha} = v't$$

$$H = \frac{1}{2}gt^2$$

所以

$$v' = \frac{L_1}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

若 $v > v'$, 可以计算得出 $H < \frac{4h}{3}$, 则从 C 点恰能飞过球网的乒乓球一定会从 D 点飞出球台. 故若 $H < \frac{4h}{3}$, 水平发射的乒乓球不论选择什么方向, 乒乓球都不能落在球网右侧台面上.

由以上讨论知,若水平发射点距离台面高度为 $1.3h < H < \frac{4h}{3}$, 虽然临界速度 $v_1 < v_2$, 但在 $v_1 < v < v_2$ 的范围内, 并不能通过选择合适的方向使乒乓球落在右侧台面上. 而当 $H > \frac{4h}{3}$ 时, 在 $v_1 < v < v_2$ 的范围内, 通过选择合适的方向就能使乒乓球落在右侧台面上. 国际乒联规定乒乓球台高度为 0.76 m, 而运动员处于击球姿势时, 击球点距离地面的高度大约为 1 m, 所以 $H \approx 0.24 \text{ m}$, 由 $H > \frac{4h}{3}$ 得球网高度 $h < 0.18 \text{ m}$, 事实上国际乒联规定球网的高度为 0.152 5 m 正是在这个范围内.

《课程标准》在优化练习和习题的选择中明确指出, 一个好的习题就是一个科学问题. 在设计习题时, 应多选择以真实物理现象为依据的问题^[1]. 近几年的高考题越来越重视对这类题目的考查, 但真实的物理现象通常受到较多物理因素的制约, 如何联系生活实际进行科学严谨地分析推理对学生是一种新的挑战, 而开放式的辨析讨论将会激发学生更加关注生活中的物理, 提高他们的科学思维能力.

参考文献

- 1 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准. 北京: 人民教育出版社, 2003