理想流体近似的讨论

赵　斌

（南京工程学院数理部　江苏 南京　211167）

（收稿日期：2015－10－14）

摘　要：针对大学物理中的理想流体模型进行了讨论，从热力学方程和纳维-斯托克斯方程出发，给出了理想流体模型的近似过程，澄清了理想流体模型的概念，阐明了理想流体的运动过程是等熵过程. 通过对造成熵增（耗散）项的物理分析，本文给出了理想流体近似可以视为冷流体近似的观点.

关键词：理想流体　纳维-斯托克斯方程　傅里叶热传导定律　牛顿粘性定律

流体是人类生活和生产中经常遇到的物质形式，气体、液体、等离子体都可以视为流体. 流体力学是研究连续介质的宏观运动规律以及它与其他运动形态之间的相互作用，它的理论是基于连续介质假说. 从流体力学的观点来说，除了固体外，其他存在形式物质的宏观运动和相互作用都可以用流体力学的理论来近似描述. 因此流体力学几乎渗透到了各个学科和工程应用领域之中.

在大学物理的知识体系中，一些教材中也对流体力学的知识进行了介绍，其中理想流体像质点、刚体等一样是一个重要的物理近似模型，一些大学物理的课本中，其定义为完全不可压缩的无粘滞性的流体[1~3]. 这一定义是不对的，从概念上说，流体力学分类中就有可压缩理想流体和不可压理想流体之分. 这一定义当然没有给出理想流体力学的本质内涵，也会使得学生在将来进一步学习流体理论时产生歧义性和矛盾. 笔者认为需要对理想流体的概念以及流体力学描述方程进行澄清，以免造成概念的混淆，同时也加深我们在教学中对流体力学的认识. 为此我们需要对理想流体模型的近似过程进行梳理.

描述流体运动的动力学方程有欧拉流体力学方程，纳维-斯托克斯（Navier－Stokes）方程，Burnett 和 Super－Burnett 方程等[4]. 其中欧拉方程也称为理想流体方程. 理想流体是流体理论中一个理想极限模型，其定义为运动过程中可以忽略粘滞和热传导效应的流体[4,5]，当然理想流体的运动行为可以用欧拉方程来描述. 在大学物理教材中流体力学介绍的知识点也主要是围绕不可压缩理想流体展开的.

下面我们从实际使用较为广泛的纳维-斯托克斯方程出发，对理想流体模型的近似过程进行分析和讨论. 流体动力学方程实质是描述流体元的质量守恒、动量守恒、能量守恒的方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u})=0 \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\nabla\cdot\chi \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla e=-p\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\chi:\nabla u-\nabla\cdot\boldsymbol{q} \tag{3}$$

其中 ρ 是流体的质量密度，$\boldsymbol{u}$，p，e 分别是流速、压强、单位质量的内能. χ 为粘滞应力张量，$\boldsymbol{q}$ 为热流. 常用的应力张量可以表示为 $P=-pI+\chi$，I 为单位张量. 在纳维-斯托克斯方程中假设了 χ 与速度梯度张量成正比，即牛顿粘性定律；$\boldsymbol{q}$ 与温度梯度成正比，即傅里叶热导定律 $\boldsymbol{q}=-\kappa\,\nabla T$. 这些定义关系也称本构方程. 当然对于上述动力学方程组计算，还需要状态方程才能够封闭可解. 这 3 个方程又分别称连续性方程、运动方程、能量方程. 为了下面讨论的方

便,将能量方程改写成

$$\rho \frac{de}{\mathrm{d}t} = -p\,\nabla\cdot \boldsymbol{u} + \chi : \nabla u - \nabla\cdot \boldsymbol{q} \tag{4}$$

由热力学的知识,假设我们考察的流体系统选取 ρ,S 为状态参量,S 为流体介质的熵(单位质量),内能可以表述为 $e=e(\rho,S)$,则有

$$\mathrm{d}e = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_S \mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial e}{\partial S}\right)_\rho \mathrm{d}S \tag{5}$$

利用热力学关系

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_S = \frac{p}{\rho^2}$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial S}\right)_\rho = T$$

上式正是热力学第一定律

$$\mathrm{d}e = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V = T\mathrm{d}S + \frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho \tag{6}$$

其中 $V=\dfrac{1}{\rho}$ 为比容.利用方程(5)和热力学关系式可以得到

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

由连续性方程(1)有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\,\nabla\cdot \boldsymbol{u} \tag{8}$$

代入方程(7)得到,

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{\rho}\,\nabla\cdot \boldsymbol{u} \tag{9}$$

这样能量方程(4)可以写成

$$\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\nabla\cdot \boldsymbol{q} + \chi : \nabla u = \nabla\cdot(\boldsymbol{\kappa}\,\nabla T) + \chi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{10}$$

容易看出单位体积、单位时间内流体热能的增量是由热传导和粘滞耗散造成的,物理上输运(粘滞、热传导、扩散)系数是大于零的,可以证明在粘滞系数大于零的任何情况下,$\chi_{ij}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \geqslant 0$(一维情况下为 $\dfrac{4}{3}\eta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$,$\eta$ 为粘滞系数)总是成立的,这样粘滞性引起的内摩擦力做功一定是会引起熵增,而且这一熵增过程是局域性的;粘滞性对流体热能的增量总是为正,也是局域的.方程(10)中的热传导项通过热输运会加热或冷却局域的流体元,对局域流体元熵的作用也是有正有负.若考察的流体系统在边界上既没有来流也没有出流,则由

$$\int_\Omega \mathrm{d}\Omega\,\nabla\cdot(\boldsymbol{\kappa}\,\nabla T) = \int_A \mathrm{d}A\cdot(\boldsymbol{\kappa}\,\nabla T) = 0$$

即热传导不会增加系统的热能,这里 Ω 是整个流体系统的总体积,其闭合的外表面为 A.但是可以证明,从整体上看流体系统,热传导总是会导致整个系统的熵增.这里为了证明叙述的简洁,我们只考虑方程(10)中的热传导项

$$\rho\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\,\nabla\cdot(\boldsymbol{\kappa}\,\nabla T) \tag{11}$$

这一方程可以写成

$$\rho\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \nabla\cdot\left(\frac{1}{T}\boldsymbol{\kappa}\,\nabla T\right) + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{T^2}(\nabla T)^2 \tag{12}$$

对整个流体体积积分,方程左边即为系统熵的体积分,即系统总熵;方程右边在考虑系统无流边界后,只剩下 $\int_\Omega \mathrm{d}\Omega\boldsymbol{\kappa}(\nabla T)^2/T^2$,这一积分总是大于零(因为热导系数 $\boldsymbol{\kappa}>0$).从热力学的观点来看,粘滞系数和热导系数为正,也正是热力学第二定律的要求,即纳维-斯托克斯方程是内在本质上是满足热力学第二定律的.

在方程(10)中忽略了热传导和粘滞效应的理想流体近似下,有 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0$,即理想流体的运动过程是等熵过程.当然这一推导过程中已经在方程(8)中忽略了扩散效应及其在能量方程中的效应.从热力学统计物理的观点来看,扩散、粘性、热传导是非平衡流体系统中微观粒子的粒子流、动量流、能量流输运的宏观表现,本质上说这些过程都是由于粒子的无规热运动造成的,它们当然是会造成流体系统的熵增,所以理想流体也就是忽略了扩散、粘性、热传导效应的流体模型.从微观上看,让我们考察流体微观粒子的速度,其绝对速度($\boldsymbol{v}$)可以表示为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}'$,其中 $\boldsymbol{u}$ 是系统的平动速度(即流体元的宏观速度),$\boldsymbol{v}'$ 是粒子无规运动的速度,其宏观的表征就是温度(T).我们可以看到,在理想流体近似下,恰就

(下转第 129 页)

3　Standard Model 与我们的宇宙

为什么沙堆会自发地填充整个定域空间？为什么保持其几何相似变大是不可能的？从微观的量子力学到宏观的经典力学再到巨观的宇宙，物理学家相信这都是由一个简单的规律所支配的.

大爆炸理论告诉我们，宇宙在初始时刻有一定的物质，随着时间的演化这些物质就将像沙粒一样自发的充满整个空间且广义相对论证明宇宙不是以几何相似的均匀增大.我们前面也证明了沙堆有着类似的性质，这说明宇宙有着和沙堆遵守着相同的物理法则.

的确，在某种层面上思考上面关于沙堆的讨论有益于理解我们的宇宙.Standard Model 告诉我们宇宙里只有处处都有“沙粒”才有可以发生物理过程的空间和时间.空间是物质的，没有物质空间将毫无意义，就像没有沙粒的沙堆即将不是沙堆一样.只不过这里的“沙粒”是尺度极小的粒子，这些小粒子组成了各种各样的物理场又以对称性自发破缺的形式形成了质量、电荷等基本物理量.

举例而言，如果沙堆内部沙粒完全均匀，我们在其中任何位置将不会感觉到有不同(各向同性)；但是，如果因为存在扰动(例如有一滴水被放入沙堆里)有一些沙子打破了这种高度的对称聚集到了一起，我们就会感觉到这些聚集起来的沙粒和其他沙粒有明显的不同.在我们的宇宙里这些“沙粒”就是 Higgs Boson，而 Standard Model 告诉我们质量正是由于上面的机制而出现的.这些组成质量的“沙粒”总会以极快的速度自发地保持均匀分布，这也是很难观察到 Higgs Boson 的原因.

参 考 文 献

1　Landau. Non - relativistic quantum mechanics, 2008. Beijing: Higher Education Press sixth edition (in Chinese). 40 ～ 75

2　Peskin. An Introduction to Quantum Field Theory, 2006. New York: Westwiew Press. 689 ～ 728

(上接第 124 页)

是忽略了流体元微观粒子的无规热运动，或者说是 $< v'^2 >$ 趋于零的冷流体近似.

参 考 文 献

1　王海婴，大学基础物理学.北京：高等教育出版社，2000. 95

2　周丰群，大学物理学(上).成都：四川大学出版社，2001. 219

3　刘扬正，张伟强.大学物理(上).北京：科学出版社，2011. 77

4　S.查普曼，T G.考林著.非均匀气体的数学理论.北京：科学出版社.1985

5　L. D. Landau, E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics, 2nd ed., New York: Pergamon Press. 1987. 2

Discussion on Ideal Fluid Approximation

Zhao Bin

(Department of Mathematics and Physics, Nanjing Institute of Technology, Nanjing, Jiangsu　211167)

: The approximation of ideal fluid are documented in this article which are not well defined in some college physics textbooks. From the point of view thermodynamics, the dissipation of fluid naturally arises from the random motion of microscopic particle of fluid. Therefore, the approximation of ideal fluid may be explained that fluid is regarded as cold one.

Keywords: ideal fluid; Navier - Stokes equation; Fourier conduction law; Newton viscosity law