竞赛与物理专题研修

单球面折射成像公式及其应用

张家乐　　王化银

（淮北市第一中学　安徽 淮北　235000）

（收稿日期：2015－10－17）

摘　要：物理竞赛几何光学球面折射问题的求解，直接利用单球面折射成像公式，往往能使得求解过程快速而简洁.

关键词：几何光学　球面折射　物理竞赛

单球面折射问题在竞赛试题中时常出现，参考解法中用到的式子较多，且进行了较多的近似处理，学生不易理解.若直接利用球面介质对光线折射的普通规律——单球面折射成像公式，则能使得求解过程快速而简洁.

1　公式推导

如图 1，设其中折射球面的球心为 C，球面两侧介质的折射率分别为 n_1 和 n_2，且 $n_1 < n_2$.我们把通过球面顶点和球心的直线称为此折射球面的主光轴.设 P 为主光轴上一物点，从 P 发出的光线 PA 正入射到球面上，它将无偏折地进入另一介质，并通过球心 C.从 P 点发出的另一光线 PB 与主光轴成角 θ（PB 为近轴光线，θ 很小），它以入射角 i_1 射到球面上的 B 点，以折射角 i_2 折射进入另一介质，并与主光轴交于 P' 点.此时我们可将 P 和 P' 分别称之为物

发射速度越大，椭圆形轨道越扁；当发射速度大于 v_2 时，人造天体将脱离地球成为太阳的人造行星；当发射速度超过第三宇宙速度 v_3 时，人造天体就摆脱太阳的束缚，脱离太阳系运动到太阳系之外的宇宙空间.

量变引起质变，发射速度的改变引起人造天体最终轨道位置的改变.任何事物量变的积累都会引起质变，量变的积累会引起质变的飞跃.

7　真理是相对的

真理都是有条件的.任何真理都有自己适用的条件和范围，如果超出了这个条件和范围，只要再多走一小步，真理就会变成谬误.物理理论也不是绝对的真理，有其适用的条件和范围.

受时代的局限，牛顿创立的经典力学的基本概念和基本原理存在着固有的局限性，主要表现在：经典力学定律只适用于宏观低速世界，对于可与光速相比的高速情况和微观世界的适用问题，当时没有涉及也不可能涉及.

万有引力理论无法解释水星进动现象，这表明万有引力理论本身遇到了不可克服的困难.只有新的引力理论出现，才可能消除理论和实践观测间的矛盾.

真理的探求是一个过程，要坚持真理，但要看清真理成立的条件，任何客观真理都是绝对性和相对性的统一.任何真理性的认识都是从相对真理向绝对真理转化过程中的一个环节.

8　结语

物理教材中蕴含着丰富的哲学思想，可以说，物理是学习哲学的资源，哲学是学习物理的工具.用哲学学物理，引导学生形成辩证唯物主义的世界观、方法论.物理与哲学教学的渗透整合，有助于激发学生学习物理知识的兴趣；有助于提高学生分析物理问题的能力；有助于拓宽学生解决物理问题的途径.物理与哲学教学的渗透整合，落实了教学的三维目标；提高了学生的科学素养；奠定了学生终身发展的坚实基础.

点和像点，它们到折射面顶点 A 的距离则分别为物距 u 和像距 v. 由于 θ 很小，由图可见 i_1 与 i_2 和图中所示的 α 和 β 都很小，根据折射定律有

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

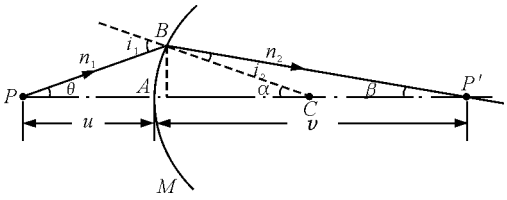

图 1

由于 i_1 和 i_2 都很小，故由近似关系应有 $\sin i_1=i_1$，$\sin i_2=i_2$，则上式变为

$$n_1 i_1=n_2 i_2$$

又由图中的几何关系可以看到 $i_1=\alpha+\theta$ 和 $i_2=\alpha-\beta$，代入上式便为

$$n_1(\alpha+\theta)=n_2(\alpha-\beta)$$

以 h 表示图中 B 点到主光轴的距离，R 表示球面半径，则由小角的近似关系可以得到

$$\alpha=\frac{h}{R}\qquad \theta=\frac{h}{u}\qquad \beta=\frac{h}{v}$$

代入上式并整理可得

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

上式即为单球面折射时的物像距公式，式中各物理量的正、负取值有一定的规则，这一规则是：入射光线从左方射来时，球心在界面的右侧，则 R 取正值，球心在界面左侧，则 R 取负值；实物和实像的物距和像距都取正值；虚物和虚像的物距和像距都取负值.

2　竞赛试题解答

2.1　题目 1

【例 1】(第 32 届全国中学生物理竞赛预赛第 16 题) 如图 2 所示，一垂直放置的高为 15.0 cm 的圆柱形中空玻璃容器，其底部玻璃较厚，底部顶点 A 点到容器底平面中心 B 点的距离为 8.0 cm，底部上沿为一凸起的球冠，球心 C 点在 A 点正下方，球的半径为 1.75 cm. 已知空气和容器玻璃的折射率分别是 $n_0=1.0$ 和 $n_1=1.56$. 只考虑近轴光线成像. 已知：当 $\lambda\ll 1$ 时，$\sin\lambda\approx\lambda$.

(1) 当容器内未装任何液体时，求从 B 点发出的光线通过平凸玻璃柱，在玻璃柱对称轴上所成的像的位置，并判断像的虚实；

(2) 当容器内装满折射率为 1.30 的液体时，求从 B 点发出的光线通过平凸玻璃柱的上表面折射后所成像点的位置，并判断这个像的虚实.

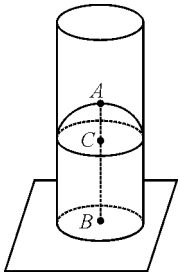

图 2

2.1.1　原解答

(1) 容器底部凸面两侧介质的折射率分别是 $n_1=1.56$ 和 $n_0=1.0$. 如图 3，由 B 点发出的经过球心 C 的光线 BA 经过顶点 A 后，方向不变，进入空气中；由 B 点发出的与 BA 成 α 角的另一条光线 BD 在 D 点折射，设折射角为 φ，并与前一条出射光线交于 E 点，E 点即 B 点的像点的位置.

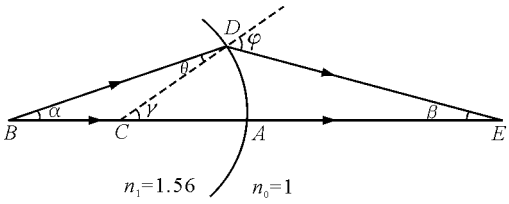

图 3

由折射定律和几何关系得

$$n_1\sin\theta=n_0\sin\varphi \tag{1}$$

$$\gamma=\alpha+\theta \tag{2}$$

$$\varphi=\gamma+\beta \tag{3}$$

在三角形 BCD 和三角形 CDE 中，由正弦定理可得

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} \tag{4}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\beta}=\frac{\overline{CE}}{\sin\varphi} \tag{5}$$

由于只考虑近轴光线成像，所以 $\alpha,\beta,\theta,\varphi$ 都是小角度，式(1)、(4)、(5) 可写为

$$n_1\theta=n_0\varphi \tag{6}$$

$$\theta\overline{CD}=\alpha\overline{BC} \tag{7}$$

$$\varphi\overline{CD}=\beta\overline{CE} \tag{8}$$

由式(6)、(7) 可得

$$\alpha+\theta=\varphi\left(1+\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\right)\frac{n_0}{n_1}=0.82\varphi<\varphi$$

所考虑的光线是会聚的,故所成的像为实像. 由式(2)、(3)、(6)、(7)、(8) 可得

$$\overline{CE}=\frac{\varphi}{\beta}\overline{CD}=\frac{1}{1-\frac{n_0}{n_1}-\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\frac{n_0}{n_1}}\overline{CD}$$

将题给数据代入上式得

$$\overline{CE}=\frac{1}{1-\frac{1}{1.56}-\frac{1.75}{8.0-1.75}\times\frac{1}{1.56}}\times 1.75\ \text{cm}=9.75\ \text{cm} \tag{9}$$

由式(9) 和题给数据得

$$\overline{BE}=\overline{BA}-\overline{AC}+\overline{CE}=(8.0-1.75+9.75)\ \text{cm}=16.0\ \text{cm} \tag{10}$$

B 点发出的光线通过平凸玻璃柱,在玻璃柱对称轴上所成的像点的位置在 C 点正上方 9.75 cm 处或在 B 点正上方 16.0 cm 处.

(2)容器底部凸面两侧介质的折射率分别是 $n_1=1.56$ 和 $n_2=1.30$. 如图 4,由 B 点发出的经过球心 C 的光线 BA 经过顶点 A 后,方向不变,进入液体中;由 B 点发出的与 BA 成 α 角的另一条光线 BD 在 D 点折射,设折射角为 φ,并与前一条出射光线交 E 点,E 点即 B 点发出的光线第一次折射后所成像点的位置.

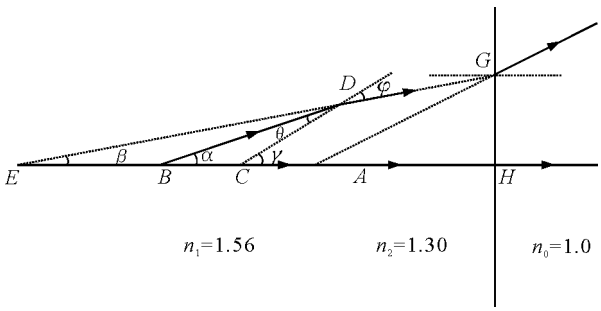

图 4

由折射定律和几何关系可得

$$n_1\sin\theta=n_2\sin\varphi \tag{11}$$

$$\gamma=\alpha+\theta \tag{12}$$

$$\gamma=\varphi+\beta \tag{13}$$

在三角形 BCD 和三角形 CDE 中,由正弦定理可得

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} \tag{14}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\beta}=\frac{\overline{CE}}{\sin\varphi} \tag{15}$$

由于只考虑近轴光线成像,所以 $\alpha,\beta,\theta,\varphi$ 都是小角度,式(11)、(14)、(15) 可写为

$$n_1\theta=n_2\varphi \tag{16}$$

$$\theta\overline{CD}=\alpha\overline{BC} \tag{17}$$

$$\varphi\overline{CD}=\beta\overline{CE} \tag{18}$$

由式(16)、(17) 可得

$$\alpha+\theta=\varphi\left(1+\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\right)\frac{n_2}{n_1}=1.07\varphi>\varphi$$

所考虑的光线是发散的,故所成的像为虚像. 由式(12)、(13)、(16)、(17)、(18) 得

$$\overline{CE}=\frac{\varphi}{\beta}\overline{CD}=\frac{1}{\frac{n_2}{n_1}+\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\frac{n_2}{n_1}-1}\overline{CD}$$

将有关数据代入上式可得

$$\overline{CE}=\frac{1}{\frac{1.30}{1.56}+\frac{1.75}{8.0-1.75}\times\frac{1.30}{1.56}-1}\times 1.75\ \text{cm}=26.25\ \text{cm} \tag{19}$$

由式(19) 和题给数据得

$$\overline{BE}=\overline{AC}+\overline{CE}-\overline{AB}=(1.75+26.25-8.0)\ \text{cm}=20.0\ \text{cm} \tag{20}$$

B 点发出的光线通过平凸玻璃柱,第一次折射后所成的像点的位置在 C 点正下方 26.25 cm 处或在 B 点正下方 20.0 cm 处.

2.1.2　利用单球折射成像公式解答

(1) 当容器内未装任何液体时,根据单球面折射成像公式得

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n_0}{v}=\frac{n_0-n_1}{R}$$

即

$$\frac{1.56}{8.0}+\frac{1}{v}=\frac{1-1.56}{-1.75}$$

解得

$$v=8.0\ \text{cm}$$

所成的像点的位置在 A 点正上方 8.0 cm 处,即 B 点正上方 16.0 cm 处.

(2) 当容器内装满折射率为 1.30 的液体时，根据单球面折射成像公式得

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

即

$$\frac{1.56}{8.0}+\frac{1.30}{v}=\frac{1.30-1.56}{-1.75}$$

解得

$$v=-28.0\ \text{cm}$$

所成的像点的位置在 A 点正下方 28.0 cm 处，即 B 点正下方 20.0 cm 处.

2.2　**题目** 2

【例 2**】**(第 25 届全国中学生物理竞赛预赛第 19 题)

如图 5 所示，一细长的圆柱形均匀玻璃棒，其一个端面是平面(垂直于轴线)，另一个端面是球面，球心位于轴线上. 现有一根很细的光束沿平行于轴线方向且很靠近轴线入射. 当光从平端面射入棒内时，光线从另一端面射出后与轴线的交点到球面的距离为 a；当光线从球形端面射入棒内时，光线在棒内与轴线的交点到球面的距离为 b. 试近似地求出玻璃的折射率 n.

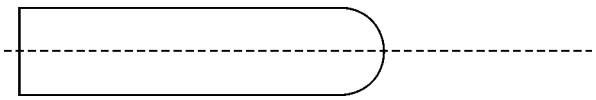

图 5

2.2.1　原解答

入射的两条光线如图 6 所示. α_1 和 β_1 是从平端面入射的光线通过球形端面时的入射角和折射角；α_2 和 β_2 是从球形端面入射的光线通过球面时的入射角和折射角. 根据折射定律有

$$n\sin\alpha_1=\sin\beta_1 \tag{21}$$

$$\sin\alpha_2=n\sin\beta_2 \tag{22}$$

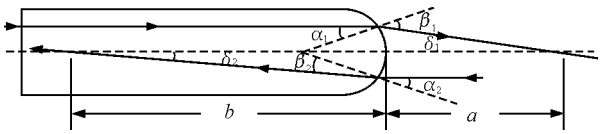

图 6

由几何关系有

$$\beta_1=\alpha_1+\delta_1 \tag{23}$$

$$\beta_2=\alpha_2+\delta_2 \tag{24}$$

设球面的半径为 R，注意到 $\alpha_1,\alpha_2,\delta_1,\delta_2$ 都是小角度，故有

$$R\alpha_1=a\delta_1 \tag{25}$$

$$R\alpha_2=a\delta_2 \tag{26}$$

根据题给的条件，式(1)、(2) 可近似表示成

$$n\alpha_1=\beta_1 \tag{27}$$

$$\alpha_2=n\beta_2 \tag{28}$$

由式(3) ～ (8) 得

$$n=\frac{b}{a} \tag{29}$$

2.2.2　利用单球折射成像公式解答

根据单球面折射成像公式得

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

当光从平端面射入棒内时

$$\frac{n}{\infty}+\frac{1}{a}=\frac{1-n}{-R}$$

当光线从球形端面射入棒内时

$$\frac{1}{\infty}+\frac{n}{b}=\frac{n-1}{R}$$

解以上两式得

$$n=\frac{b}{a}$$

竞赛试题的原解答，相当于将单球面折射成像公式从头至尾又推导了一遍，其中涉及到折射定律、几何关系及近轴光线情况下近似处理，过程呈现中用到的式子也必然较多. 但这种解法辅助以光路图，成像位置、虚实，一目了然，较为直观. 直接利用单球面折射成像公式求解此类问题，省去了中间推导的繁杂过程，简洁、明了，像的虚实也可以根据像距 v 的正负进行判断. 对于高强度的物理竞赛拔尖选优考试，后一种方法更为高效、省时，同时也能反映出学生对物理钻研的深度与广度.

参 考 文 献

1　程稼夫. 中学奥林匹克竞赛物理讲座. 合肥：中国科学技术大学出版社，2000