

波函数与本征函数的分析

门福殿

[中国石油大学(华东)理学院 山东 青岛 266580]

田金承

(山东铝业职业学院 山东 淄博 255065)

(收稿日期:2015-10-19)

摘要:依据量子力学基本理论,分析了波函数与本征函数的定义、性质及其意义,明确两个重要概念的不同.

关键词:波函数 本征函数 薛定谔方程 本征方程 标准条件

量子体系的状态由波函数完全描述,体现于波函数的几率意义: $\psi(\mathbf{r}, t)$ 可给出 t 时刻 $\mathbf{r}$ 处的几率密度,还可给出任意力学量取各种可能值的几率,由此可知道力学量的平均值.

量子体系的波函数演化由薛定谔方程确定,即

强变为零,看到“最暗现象”;再点击“ θ 角”按钮,表明图5中“起偏器”和“检偏器”的偏振化方向之间的夹角为除了 $\theta \neq 0, 90^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 4个角以外的任意角度 θ ,可观察到“线偏振光”的一部分通过“检偏器”,光强变为 $I = I_0 \cos^2 \theta$,看到“最暗和最亮之间现象”.

通过放映制作的“光的偏振”动画课件与课堂启发式的讲解,可以使学生较深刻地理解和掌握“自然光”、“线偏振光”、“起偏”、“检偏”等概念以及“马吕斯定律”计算公式,收到事半功倍的教学效果.

4 结语

通过对“迈克耳孙干涉实验”微视频在“光的干涉”理论教学中的运用以及“光栅衍射实验”微视频在“光栅衍射”理论教学中的运用的探讨,以及“起偏器和检偏器”的“动画课件”在“光的偏振”理论教学中的具体运用,对于探讨“微视频”及“动画课件”在《大学物理》课程教学中的应用是一个有益的尝试.在《大学物理》课程教学中注意两种模式的分别

体系的哈密顿算符决定,而该算符由系统本身与所处的外界环境确定.

波函数要满足有限(平方可积)、单值、连续的物理条件即标准条件.

运用,也可以把这两种模式有机结合起来进行课堂教学,不管哪种模式都可以激发学生的课堂学习兴趣,调动学生的积极性,还可以激发学生的潜能,对于提高小学时的《大学物理》课程的教学质量是有实际意义的,尤其是对于拓展学生的学习思路,启迪学生的理论与实验相结合创新意识也是具有积极意义的.

参考文献

- 1 倪燕茹. 补偿法的运用与探讨. 重庆工学院学报(自然科学版), 2007, 21(7): 51 ~ 55
- 2 倪燕茹. 类比法和补偿法在大学物理教学中的运用与探讨. 内江师范学院学报, 2009, 24(8): 83 ~ 86
- 3 孙厚谦, 洪林, 史友进, 等. 应用型工科“大学物理”课程教学改革与实践与思考. 中国大学教学, 2010(12): 49 ~ 51
- 4 彭传正. 基于CDIO理念的大学物理教学改革研究. 物理通报, 2013(10): 24 ~ 25
- 5 王慧君. 地方院校大学物理“模块类·结构化·建构化”教学模式初探. 河南科技学院学报, 2011(12): 102 ~ 103

引入算符,特别是厄米算符后,对于其本征方程 $\hat{F}\varphi=F\varphi$,则 φ 是属于本征值 F 的本征函数,或对应于本征值 F 的本征态,即在该态下力学量 $\hat{F}$ 有确定的值.

在一般情况下, $\hat{F}\varphi=F\varphi$ 不是薛定谔方程,本征函数 φ 也不是波函数 ψ . 但在许多教科书中的有关节点上,时常将本征函数与波函数联系起来,以突出本征函数与波函数的关联. 如将本征函数说成是力学量取确定值时状态的波函数^[1];在求角动量平方算符 $\hat{l}^2$ 的本征函数时直接应用波函数所满足的标准条件^[2];将一类本征函数 $\delta(x)$ 视为一类波函数^[3,4];等等. 本文试图对这两个重要概念做一些分析.

1 波函数与本征函数满足的规律不同

波函数满足薛定谔方程即波动方程. 若波函数 ψ_1, ψ_2 都是系统的可能的态,则其线性叠加仍是系统的可能的态. 厄米算符的本征函数满足其本征方程,该方程并不是波动方程;若 φ_1, φ_2 是厄米算符 $\hat{F}$ 的两个不同本征值的本征态,则其线性叠加不再是 $\hat{F}$ 的本征态. 在薛定谔绘景中,波函数是含时的,承载着系统的状态随时间的演化;厄米算符的本征函数是不含时的,由它无法展示体系的状态随时间的演化,它仅仅是该算符所代表的力学量取确定值时系统的单一性的态函数,除此外,本征函数并不能给出其他任何信息. 由此表明,波函数与本征函数满足的规律不同,并承载着不同的物理角色.

2 波函数与本征函数的性质不同

厄米算符的本征函数可以取为相互正交的函数,且构成完全系;波函数(定态波函数除外)之间并无正交关系,也不构成完全系,而是服从统一的薛定谔方程.

3 波函数与本征函数的几率意义不同

本征函数不具备波函数那样的几率意义,更没

有完全性的几率意义. 如,对氢原子角动量分量算符 $\hat{l}_z$ 的本征函数 $Ae^{im\varphi}$,不能将其解释为具有 φ 位置的几率幅,因 φ 并不能单独代表一个位置,而拥有 (r, θ, φ) 位置的几率也不是 $Ae^{im\varphi}$ 的模方,而是 $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ 的模方;本征函数是 $Ae^{im\varphi}$ 更不具备完全性的几率意义,例如我们不能通过该函数而得知氢原子的能量、角动量可能取值的几率,只会知道角动量的 z 分量的取值. 如氢原子处于态

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta, \varphi)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} - \frac{\sqrt{3}}{2}R_{32}(r)Y_{20}(\theta, \varphi)e^{-i\frac{E_3 t}{\hbar}}$$

该 $\psi(r, \theta, \varphi, t)$ 态中,单从算符 $\hat{l}_z$ 看来,该态亦为 $\hat{l}_z$ 的 $m=0$ 的一种本征态 $Ae^{im\varphi}$, $\hat{l}_z$ 有确定的取值即 $l_z=0$,但仅凭本征态 $Ae^{im\varphi}$ 并不能给出氢原子能量、角动量的取值以及位置几率分布的信息. 因此,不能说其中的 $Ae^{im\varphi}$ 是 $\hat{l}_z$ 有确定值时的波函数, $\hat{l}_z$ 有确定值时的波函数是该 $\psi(r, \theta, \varphi, t)$.

由此可见,波函数与本征函数虽然都可称为态函数,但是,波函数对状态的描述是完全性的,本征函数对状态的描述是单一性的. 量子力学理论中的标准条件是源于波函数的几率意义而提出的,而本征函数不具备波函数所具有的几率意义,因此本征函数不必一定满足波函数应满足的标准条件. 如

位置算符 $\hat{x}$ 的本征函数 $\delta(x-x')$,不满足处处有限、连续;

动量分量算符 $\hat{p}_x$ 的本征函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\frac{p_x x}{\hbar}}$,不满足平方可积;

角动量平方算符 $\hat{l}^2$ 的本征函数 $x+y+z$ (本征值 $2\hbar^2$),不满足平方可积;

在有些厄米算符的本征函数的求解中,有些教科书直接应用波函数的标准条件. 如 $\hat{l}^2, \hat{l}_z$ 算符的本征函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi), Ae^{im\varphi}$ 的求解,几乎所有的教科书直接应用了标准条件(特别是使其满足单值和有限). 需要说明的是, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 与 $Ae^{im\varphi}$ 是在求解

氢原子的定态薛定谔方程时得到的,由于采用了球坐标系,将对定态波函数的求解变成了能量算符、角动量平方算符、角动量分量算符的共同本征函数的求解, $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 与 $Ae^{im\varphi}$ 实际上都变成了氢原子定态波函数的组成部分.或者是, $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 是角动量平方算符与空间转子能量算符 $\frac{\hat{l}^2}{2I}$ 的共同的本征函数, $Ae^{im\varphi}$ 是角动量分量算符 $\hat{l}_z$ 与平面转子能量算符 $\frac{\hat{l}_z^2}{2I}$ 的共同的本征函数.作为不含时的空间或平面转子能量算符的本征函数,其实是相应的定态波函数的空间部分.无论从那一角度看,为使定态波函数整体满足标准条件,而使作为定态波函数的组成部分也满足标准条件是自然的,如果不是如此,但就厄米算符的本征函数自身来讲,也可以不满足标准条件.

4 特别的本征函数可代表波函数

只有当系统的哈密顿算符不显含时间时,系统的薛定谔方程方可化为能量算符的本征方程,其本征函数(再乘以 $e^{-\frac{Et}{\hbar}}$) 方可代表(定态)波函数.

5 波函数的表达依托于本征函数

量子力学(波函数、算符及其关系式)的表达可

依托于具体的表象.而表象中的基矢就是力学量算符的所有本征函数.因此,波函数的表达离不开力学量算符的本征函数.不满足标准条件的本征函数并不影响表象的角色.如位置算符 $\hat{x}$ 的本征函数 $\delta(x-x')$ 确立的位置表象,动量分量算符 $\hat{p}_x$ 的本征函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\frac{p_x x}{\hbar}}$ 确立的动量表象,都是常用的量子力学表象.

基于以上分析,我们认为波函数与本征函数是相互关联但又是有很多区别的两个概念,在教科书(初级量子力学及高等量子力学)中应该既体现波函数与本征函数的相互关联又要分析两者的区别,以利于在教学中更准确地把握量子力学的两个重要概念,加深对量子力学基本问题的理解.

参 考 文 献

1 钱伯初.量子力学.北京:高等教育出版社,2006.69

2 朱栋培.量子力学基础.合肥:中国科学技术大学出版社,2012.105 ~ 107

3 曾谨言.量子力学(I).北京:科学出版社,2007.41

4 张启仁.量子力学.北京:科学出版社,2002.28

Analysis on Wave Functions and Eigen Functions

Men Fudian

[College of Science, China University of Petroleum(East China),Qingdao,Shandong 266580]

Tian Jincheng

(Shandong Aluminum Vocational College,Zibo,Shandong 255065)

Abstract:Based on the basic theory of quantum mechanics, the definition,the properties and the significance of the wave function and eigen — function are analyzed, and the difference of the two important concepts are made clear.

Key words:wave function;eigen function;Schrödinger equation;eigen equation;standard condition